



TESIS - SM 142501

**FLUIDA VISKOELASTIK YANG MELEWATI PELAT
DATAR DENGAN MEMPERHATIKAN FAKTOR
HIDRODINAMIKA MAGNET**

PUTRI PRADIKA WANTI
NRP 1213 2010 22

DOSEN PEMBIMBING
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
Dr. Chairul Imron, MI.Komp

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015



TESIS - SM 142501

**VISCOELASTIC FLUID PAST A FLAT PLATE WITH THE
FACTOR OF MAGNETOHYDRODYNAMIC**

PUTRI PRADIKA WANTI
NRP 1213 2010 22

SUPERVISOR
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
Dr. Chairul Imron, MI.Komp

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2015

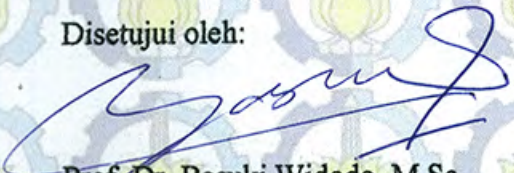
FLUIDA VISKOELASTIK YANG MELEWATI PELAT DATAR DENGAN MEMPERHATIKAN FAKTOR HIDRODINAMIKA MAGNET

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya


oleh:
PUTRI PRADIKA WANTI
NRP. 1213 201 022

Tanggal Ujian : 6 Mei 2015
Periode Wisuda : September 2015

Disetujui oleh:


Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
NIP. 19650605 198903 1 002

(Pembimbing)


Dr. Chairul Imron, M.Komp
NIP. 19611115 198703 1 003

(Pembimbing)


Dr. Imam Mukhlash, S.Si, M.T
NIP. 19700831 199403 1 003

(Penguji)


Dr. Hariyanto, M.Si
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)


Direktur Program Pascasarjana,

Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.
NIP. 19640405 199002 1 001

FLUIDA VISKOELASTIK YANG MELEWATI PELAT DATAR DENGAN MEMPERHATIKAN FAKTOR HIDRODINAMIKA MAGNET

Nama Mahasiswa : Putri Pradika Wanti
NRP : 1213 2010 22
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
2. Dr. Chairul Imron, MI.Komp

ABSTRAK

Salah satu jenis fluida non-*Newtonian* adalah fluida viskoelastik, fluida ini memiliki karakteristik viskos (kental) dan elastis. Banyak peneliti melakukan penelitian mengenai fluida non-*Newtonian*, salah satunya mengenai hidrodinamika magnetik fluida viskoelastik terutama untuk pengaplikasian teknik. Persamaan dari fluida viskoelastik ini membentuk suku-suku turunan (derivatif) tingkat tinggi, khususnya pada persamaan momentumnya. Sehingga dibutuhkan jumlah syarat batas yang lebih banyak untuk menyelesaikannya. Dalam penelitian ini akan dikaji masalah hidrodinamika magnetik fluida viskoelastik yang melewati pelat datar. Aliran fluida viskoelastik pada pelat datar akan menimbulkan lapisan batas. Persamaan lapisan sederhana merupakan upaya awal untuk menghitung permasalahan tersebut. Persamaan lapisan batas yang diperoleh selanjutnya ditransformasikan kedalam bentuk nondimensi, kemudian akan diselesaikan secara numerik menggunakan Metode Beda Hingga eksplisit. Berdasarkan hasil simulasi yang dilakukan, diperoleh hubungan antara parameter-parameter pada model matematika terhadap dengan laju dan temperature fluida. Laju pada fluida akan mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya nilai pada parameter magnetik (M), parameter viskoelastik (K), dan bilangan Pradntl (Pr). Sedangkan dengan bertambahnya nilai pada bilangan Eckert (Ec) akan menambah laju pada fluida. Temperatur pada fluida akan mengalami kenaikan ketika parameter magnetik, parameter viskoelastik, dan bilangan Eckert (Ec) semakin besar. Sebaliknya temperatur pada fluida akan mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya nilai bilangan Pradntl (Pr).

Kata kunci: fluida viskoelastik, hidrodinamika magnetik, *Finite Difference Method*

VISCOELASTIC FLUID PAST OVER A FLAT PLATE WITH THE EFFECT OF MAGNETOHYDRODYNAMIC

By : Putri Pradika Wanti
Student Identity Number : 1213 2010 22
Supervisor : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Chairul Imron, MI.Komp

ABSTRACT

One type of non-Newtonian fluid is viscoelastic fluid, this fluid has the characteristics of a viscous and elastic. Many researchers conduct research on non-Newtonian fluid, one of the magnetohydrodynamics of viscoelastic fluid especially for the application on the industrial field. Equations of viscous-elastic fluid is formed in high derivatives level, especially in the momentum equation. So it takes a number of boundary conditions are more to complete. In this study will be studied problem of magnetohydrodynamics of viscoelastic fluid passing through the flat plate. Viscoelastic fluid flow on a flat plate will cause the boundary layer. Boundary layer equations simple is the first step to calculate these problems. Boundary layer equations were then transformed into the form of non-dimensional, then be solved numerically using the method of discretization technique Finite Difference Method. Based on the simulation results, obtained by the relationship between the parameters of the mathematical model for the rate and temperature of the fluid. The velocity of the fluid will decrease with increasing the value of the magnetic parameter (M), the viscoelastic parameters (K), and the number Pradntl (Pr). While the increase in the value of the number Eckert (Ec) will increase the velocity of the fluid. The temperature of the fluid will increase when the magnetic parameter(M), viscoelastic parameters (K), and the number Eckert (Ec) is getting big. In contrast to the fluid temperature will decrease with increasing numbers Pradntl value (Pr).

Keywords : viscoelastic fluid, magnetohydrodynamic, *Finite Difference Method*.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim,

Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **“FLUIDA VISKOELASTIK YANG MELEWATI PELAT DATAR DENGAN MEMPERHATIKAN FAKTOR HIDRODINAMIKA MAGNET”** sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Magister (S-2) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan Tesis ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
2. Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T., selaku Direktur Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Prof. Dr. Dra. Erna Apriliani, M.Si., selaku Dosen Wali dan Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
4. Dr. Subiono, M.S., selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika yang telah memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
5. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. dan Dr. Chairul Imron, M.I.Komp., selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu di tengah kesibukannya untuk berdiskusi dan memberi arahan dalam penyusunan tesis ini.
6. [Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT](#) dan [Dr. Hariyanto, M.Si](#) selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan dan juga saran kepada penulis sehingga Tesis ini dapat diselesaikan dengan baik.

7. Seluruh Dosen Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, terimakasih atas seluruh ilmu, nasihat, dan bimbingannya, serta seluruh Staff Administrasi, terima kasih atas segala bantuannya.
8. Ibunda Sundaiyah, Ayahanda Bambang Seni Subakat, Adikku Dasty Dewi Prawanti yang senantiasa memberikan do'a, dukungan dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
9. Teman-teman Pascasarjana Matematika ITS angkatan 2013, terima kasih atas kenangan yang kalian berikan.

Semoga Allah SWT selalu memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tesis ini, Amin.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan kedepannya. Semoga Tesis ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya ilmu matematika dan terapannya, Amin.

Surabaya, 22 Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR SIMBOL	xv
BAB 1 PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Viskositas	4
2.2 Fluida <i>Newtonian</i> dan Fluida <i>non-Newtonian</i>	5
2.3 Lapisan batas (<i>Boundary layer</i>)	5
2.4 Konveksi dan parameter-parameternya	7
2.4.1 Konveksi Alami	10
2.4.2 Konveksi Paksa	7
2.5 Persamaan Massa, Momentum, dan Termodinamika	8
2.5.1 Persamaan Kekekalan Massa	7
2.5.1 Persamaan Momentum	9
2.5.1 Persamaan Termodinamika	10
2.7 Persamaan Maxwell	11
2.8 Metode Beda Hingga Eksplisit FTCS	12
2.8.1 Iterasi Gauss Seidel	12

BAB 3 METODE PENELITIAN	13
BAB 4 MODEL MATEMATIKA	15
4.1 Persamaan Konservasi Massa	15
4.2 Persamaan Konservasi Momentum	16
4.3 Persamaan Konservasi Lapisan Batas	22
4.4 Penurunan Persamaan Energi	22
4.5 Kondisi Batas	24
4.6 Fungsi Alir (<i>Stream Function</i>)	24
BAB 5 PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA	29
5.1 Diskritisasi Model	29
5.2 Algoritma Program	32
5.3 Hasil Simulasi	33
BAB 6 KESIMPULAN DAN SARAN	40
DAFTAR PUSTAKA	42
LAMPIRAN	44

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Profil Temperatur pada saat $Pr = 0.7$, $Ec = 0$	33

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
1.1 Contoh aplikasi fluida viskos-elastis dalam dunia industri	2
2.1 Grafik Kurva Tegangan Geser Fluida Newtonian dan Non-Newtonian	6
2.2 Volume kendali dan permukaan kendali pada suatu sistem	8
3.1 Variasi bilangan Eckert dan bilangan Pradntl pada profil laju	36
4.1 <i>Bounday Layer</i> pada Pelat Datar.....	15
4.2 Aliran Fluks massa pada volume kendali	16
4.3 Aliran Fluks momentum pada volume kendali	17
5.1 Pengaruh Variasi Parameter Viskoelastik terhadap Profil Temperatur	33
5.2 Pengaruh Variasi Parameter Viskoelastik terhadap Profil Laju	34
5.3 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik terhadap Profil Temperatur	35
5.4 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik terhadap Profil Laju	35
5.5 Pengaruh Variasi bilangan Pradntl terhadap Profil Temperatur	36
5.5 Pengaruh Variasi bilangan Pradntl terhadap Profil Laju	37
5.6 Pengaruh Variasi bilangan Eckert terhadap Profil Temperatur	37
5.6 Pengaruh Variasi bilangan Eckert terhadap Profil Laju	38

DAFTAR SIMBOL

ρ	Densitas Fluida
d	Tensor perubahan bentuk
\hat{d}	Konvektif derivative atas
g	Gravitasi
F_x	Gaya pada sumbu x
F_y	Gaya pada sumbu y
P	Gaya tekan
K	Parameter viskoelastis
U_∞	Kecepatan aliran bebas
u	Komponen kecepatan pada sumbu x
v	Komponen kecepatan pada sumbu y
x	Koordinat arah gerak pada permukaan
y	Koordinat arah gerak pada permukaan
\dot{q}	Laju kalor pembangkit
\forall	Volume fluida
ν	Viskositas kinematis fluida
θ	Profil temperature
\mathbf{V}	Vektor kecepatan aliran fluida
A	Luas permukaan
B	Gaya magnetik
U_x	Laju konstan
$V_x(x) > 0$	<i>Injection</i>
$V_x(x) < 0$	<i>Suction</i>
T_w	Temperatur permukaan
T_∞	Temperatur lingkungan
ψ	Fungsi alir
M	Parameter magnetik

$f_w > 0$	<i>Injection</i>
$f_w(x) < 0$	<i>Suction</i>
λ_m	Parameter pergerakan
\hat{n}	Vektor normal terhadap elemen dA
\dot{m}	Laju aliran massa
cs	<i>Control surface</i> atau permukaan kendali
cv	<i>Contol Volume</i> atau volume kendali
μ_0	Viskositas dinamik
k_0	Koefisien memori pendek
F_x	Gaya pada sumbu- x
F_y	Gaya pada sumbu- y

BAB 1

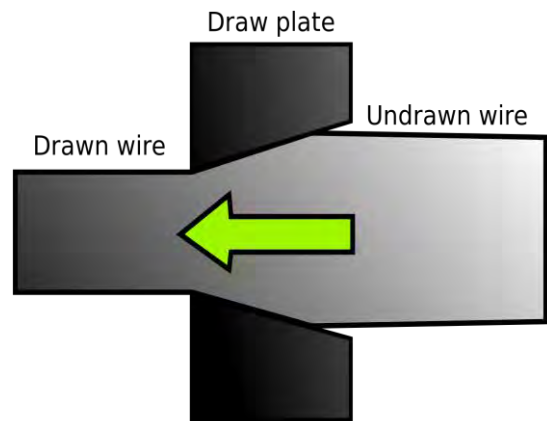
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fluida non-*Newtonian* adalah fluida yang tegangan gesernya tidak linier terhadap laju regangan geser. Tegangan geser ini merupakan interaksi antara fluida dengan batas padat yang diberi gaya pada suatu luasan. Sedangkan regangan geser adalah perpindahan sudut antara titik-titik awal fluida saat luasan diam dengan titik-titik fluida setelah luasan diberi suatu gaya dengan kecepatan tertentu. Fluida pseudoplastic, fluida shear thinning, fluida viskoelastik, dan fluida thixotropic adalah contoh dari fluida non-*Newtonian* dalam kehidupan sehari-hari.

Model sederhana untuk fluida viskoelastik pada awalnya diperkenalkan oleh Rivlin (1949). Penelitian untuk fluida viskoelastik juga dilakukan oleh CO dan Bird (1977), dikatakan bahwa fluida tidak akan pernah bergerak sangat jauh atau sangat rapat dari konfigurasi awalnya. Pengembangan penelitian tentang fluida viskoelastik telah dilakukan yaitu mengenai masalah fluida yang diselesaikan menggunakan solusi eksak. Sebagai contoh, Andersson (1992) meneliti masalah aliran hidrodinamika magnetik fluida yang melewati sebuah permukaan. Dari hasil penelitian diketahui bahwa efek eksternal daerah bermagnet memiliki hasil yang sama dengan viskos-elastisitas dari aliran fluida.

Dalam beberapa tahun ini penelitian untuk permasalahan fluida viskoelastik menjadi sangat penting, mengingat pemanfaatannya yang sangat luas dan bisa digunakan untuk pengembangan ilmu sains maupun teknik. Proses peleburan baja merupakan salah satu pengaplikasian fluida viskos-elastis yang melewati pelat datar dalam bidang industri, listrik yang terdapat pada dua pelat akan menginduksi fluida menjadi medan magnet, peristiwa inilah yang disebut dengan hidrodinamika magnetik. Ketika fluida melewati dua pelat maka akan terbentuk lapisan batas yang akan digunakan untuk menyelesaikan model matematika dengan menggunakan teori lapisan batas. Penelitian kali ini akan menganalisa pengaruh parameter-parameter seperti bilangan Prandtl, bilangan Eckert, parameter viskoelastik, dan parameter magnet terhadap sifat fisik dari fluida yaitu temperatur dan kecepatan fluida. Selanjutnya dengan mengetahui temperatur dan kecepatan fluida akan bermanfaat untuk mengetahui tingkat keausan dua pelat datar pada proses peleburan baja (Wireworld, 2011). Gambar 1.1 menunjukkan proses peleburan baja dan *wire/plate drawing*.



Gambar 1.1 Peleburan baja dan proses *wire/plate drawing* (Wireworld, 2011)

Berdasarkan pemanfaatannya dalam bidang teknik khususnya pada proses peleburan baja dan proses *wire/plate drawing* maka pada penelitian ini akan dibahas mengenai masalah hidrodinamika magnetik fluida viskoelastik yang melalui pelat datar. Aliran fluida viskoelastik pada pelat datar selanjutnya menimbulkan lapisan batas. Persamaan lapisan batas yang diperoleh selanjutnya ditransformasikan kedalam bentuk non-dimensi, kemudian akan diselesaikan secara numerik menggunakan Metode Beda Hingga Eksplisit. Hasil numerik yang diperoleh nantinya melibatkan profil kecepatan dan suhu, parameter magnetik, parameter viskoelastik dan bilangan Prandtl. Sehingga dapat digambarkan berupa grafik hubungan antara satu variabel dengan variabel lainnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang ada, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana membangun model matematika fluida viskoelastik pada pelat datar dengan memperhatikan faktor hidrodinamika magnet.
2. Bagaimana penyelesaian model matematika tersebut dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit.
3. Apa pengaruh parameter materi seperti viskoelastik (K), parameter magnet (M), bilangan Prandtl (Pr), bilangan Eckert (Ec) pada profil temperatur (θ) dan velocity f' .

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

1. Objek penelitian yang digunakan berbentuk pelat datar.

2. Aliran bersifat tunak (steady).
3. Diasumsikan dalam temperatur dan flux panas konstan.
4. Penyelesaian numerik menggunakan skema Metode Beda Hingga.
5. Visualisasi hasil penelitian menggunakan software Matlab.

1.4 Tujuan Penelitian

Dari perumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini adalah

1. Membangun model matematika dari fluida viskoelastik pada pelat datar dengan memperhatikan faktor hidrodinamika magnet.
2. Menyelesaikan model matematika yang diperoleh dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit.
3. Menganalisis hasil dan pengaruh parameter materi seperti viskoelastik (K), parameter magnet (M), bilangan Prandtl (P_r) dan bilangan Eckert (Ec), pada profil temperatur (θ) dan velocity f' .

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah mengetahui temperatur dan kecepatan dari fluida sehingga dapat digunakan untuk menentukan tingkat keausan dari pelat datar dan menentukan kualitas dari baja yang dihasilkan pada proses peleburan baja.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Viskositas

Viskositas (μ) sebuah fluida menggambarkan kekuatan hambatnya untuk mengalir karena pengaruh tegangan geser. Air yang tipis memiliki viskositas lebih rendah, sedangkan madu yang kental, memiliki viskositas yang lebih tinggi. Sederhananya, semakin rendah viskositas suatu fluida semakin besar juga pergerakan dari fluida tersebut. Oleh karena itu viskositas dari suatu fluida dapat menjelaskan ketahanan internal fluida untuk mengalir dan dapat digunakan untuk menganalisa pengukuran dari pergeseran suatu fluida. Viskositas cairan secara umum berkurang sejalan dengan peningkatan suhu. Viskositas gas secara umum bertambah sejalan dengan peningkatan suhu. Semua fluida (kecuali superfluida) memiliki ketahanan dari tekanan sehingga disebut kental, tetapi fluida yang tidak memiliki ketahanan tekanan dan tegangan disebut fluida ideal.

2.2 Fluida *Newtonian* dan Fluida *non-Newtonian*

Fluida *Newtonian* (istilah yang diperoleh dari nama Isaac Newton) adalah suatu fluida yang memiliki kurva tegangan yang linier. Air adalah contoh dari fluida *Newtonian*. Keunikan dari fluida *Newtonian* adalah fluida ini akan terus mengalir sekalipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Hal ini disebabkan karena viskositas dari suatu fluida newtonian tidak berubah ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Viskositas dari suatu fluida *Newtonian* hanya bergantung pada temperatur dan tekanan. Viskositas sendiri merupakan suatu konstanta yang menghubungkan besar tegangan geser dan gradien kecepatan pada persamaan.

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \text{linier}$$

dimana :

τ = tegangan geser fluida

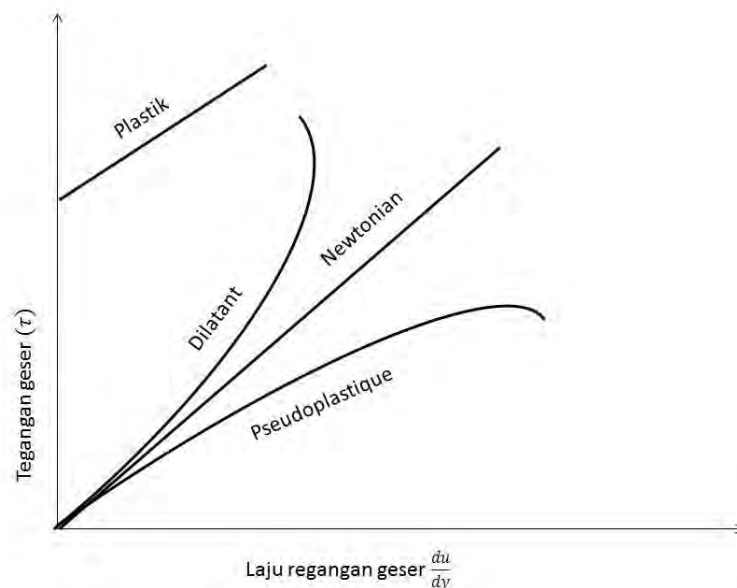
μ = viskositas fluida

$\frac{\partial v}{\partial x}$ = gradien kecepatan yang arahnya tegak lurus dengan arah geser.

Fluida non-*Newtonian* adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini menyebabkan fluida non-*Newtonian* tidak memiliki viskositas yang konstan dan laju deformasi berlangsung tak linier atau dengan kata lain tidak memenuhi hukum linierisasi Newton.

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \text{tak linier}$$

Berdasarkan kedua uraian tentang karakteristik suatu fluida di atas, perbedaaan antara fluida yang berkarakteristik *Newtonian* dan non-*Newtonian* adalah linier dan tak liniernya antara tegangan geser dengan gradien kecepatannya. Hal ini diperjelas Gambar 2.1 yang menunjukkan kurva antara tegangan geser dengan gradient kecepatan fluida yang berkarakteristik *Newtonian* dan non-*Newtonian* (Potter, 2008).



Gambar 2.1. Grafik kurva tegangan geser fluida non-*Newtonian* dan fluida *Newtonian* (Potter, 2008)

2.3 Lapisan Batas (Boundary Layer)

Boundary layer adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat tempat fluida mengalir, dimana di dalam lapisan tersebut pengaruh viskositas maupun gaya inersia sangat

berpengaruh. Lapisan batas laminar dapat dengan mudah diklasifikasikan menurut struktur dan keadaan dimana mereka diciptakan. Lapisan batas Blasius mengacu pada kesamaan solusi pada pelat datar yang terpasang berdekatan.

2.4 Konveksi dan Parameter-parameternya

Konveksi perpindahan panas dikategorikan ke dalam dua bentuk aliran, yaitu konveksi alami dan konveksi paksaan. (Long dan Sayma, 2009)

2.4.1 Konveksi alami

Perpindahan panas konveksi alami atau konveksi bebas adalah perpindahan panas antara permukaan dengan fluida yang bergerak di atasnya, dimana gerakan fluida disebabkan langsung oleh gaya apung (*Bouyancy Forced*) yang timbul akibat perubahan densitas pengaruh dari variasi temperatur aliran.

2.4.2 Konveksi Paksaan

Konveksi paksaan terjadi karena adanya pengaruh dari gaya eksternal. Sebagai contoh adalah pelat datar yang panas diberi gaya berupa kipas pendingin, sistem drainase, dan aliran air dengan pemanas. Parameter-parameter dalam bentuk bilangan non-dimensional digunakan dalam perhitungan untuk mempermudah analisa.

Bilangan Prandtl dipakai untuk menentukan distribusi temperatur fluida pada lapisan batas. Penentuan bilangan Prandtl diformulasikan sebagai berikut (Kreith, 1994).

- Bilangan Prandtl, merupakan perbandingan antara diffusivitas momentum dengan diffusivitas suhu dan dirumuskan sebagai berikut:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\frac{\mu_0}{\rho}}{\frac{k}{c_p \rho}} (C_p \mu) / k$$

Keterangan simbol:

C_p = panas spesifik

ρ = densitas

k = konduktifitas termal

2.5 Persamaan Kekekalan Massa, Momentum, dan Hukum Termodinamika

2.5.1 Persamaan Kekekalan Massa

Sebuah sistem didefinisikan sebagai kumpulan dari isi yang tidak berubah maka hukum kekekalan massa dalam suatu sistem dapat dinyatakan sebagai berikut (Potter, 2008):

Laju perubahan terhadap waktu dari massa sistem = 0

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \quad (2.1)$$

Massa sistem (M_{sys}) adalah jumlah dari seluruh perkalian antara kerapatan dengan volume dari sistem tersebut dan dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut:

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho dV \quad (2.2)$$

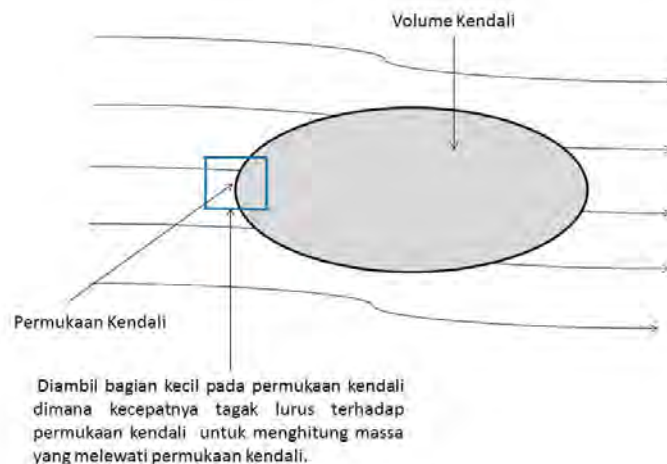
Selanjutnya sesuai dengan teorema transport Reynold:

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} \int_{sys} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho n dV + \int_{cs} \rho n \cdot \mathbf{V} \hat{\mathbf{n}} dA \quad (2.3)$$

dapat diaplikasikan pada hukum kekekalan massa sehingga memungkinkan bahwa laju perubahan terhadap waktu dari massa sistem yang berimpit sama dengan jumlahan dari laju perubahan terhadap waktu dari massa dari kandungan volume kendali dan laju aliran netto dari massa melalui permukaan kendali dengan ketentuan $n = 1$. Secara matematis ditulis dalam bentuk:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \cdot \mathbf{V} \hat{\mathbf{n}} dA \quad (2.4)$$

Gambar (2.2) mengilustrasikan bagian volume kendali dan permukaan kendali pada suatu sistem



Gambar 2.2 Volume kendali dan permukaan kendali pada suatu sistem (Welty, dkk(1976))

Apabila sebuah aliran tunak, maka seluruh sifat medan (yaitu sifat dari suatu titik tertentu) termasuk kerapatan bernilai konstan terhadap waktu, dan laju perubahan terhadap waktu dari massa kandungan volume kendali adalah nol. Artinya:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV = 0 \quad (2.5)$$

Integral $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ dalam integral laju aliran massa menyatakan perkalian dari komponen kecepatan, yang tegak lurus terhadap suatu bagian kecil permukaan kendali dan bidang diferensial dA . Tanda dari perkalian titik adalah (+) untuk aliran yang keluar dari volume kendali dan (−) untuk aliran ke dalam volume kendali karena $\hat{\mathbf{n}}$ adalah positif apabila menunjuk keluar dari volume kendali. Jadi, $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ adalah laju aliran volume melalui permukaan kendali, sedangkan $\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ adalah laju aliran massa melalui permukaan kendali. Jika laju aliran massa $\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ dijumlahkan pada seluruh permukaan kendali, seperti yang ditunjukkan oleh integral:

$$\int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (2.6)$$

maka hasilnya adalah laju aliran massa netto melalui permukaan kendali, atau:

$$\int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \sum \dot{m}_{keluar} - \sum \dot{m}_{ke dalam} \quad (2.7)$$

dimana \dot{m} adalah laju aliran massa (slug/s atau kg/s). Jika integral pada Persamaan (2.6) adalah positif, aliran netto mengarah keluar dari volume kendali, jika integral negatif, aliran netto mengarah ke dalam volume kendali.

Pernyataan volume kendali untuk *kekalan massa*, yang biasanya disebut *persamaan kontinuitas*, untuk volume kendali yang tetap dan tidak berdeformasi diperoleh dengan mengkombinasikan Persamaan (2.1), (2.2), dan (2.3) yang menghasilkan:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0 \quad (2.8)$$

2.5.2 Persamaan Momentum

Hukum kedua Newton dari gerak sebuah sistem adalah laju perubahan terhadap waktu dari momentum linier sistem sama dengan jumlah dari gaya-gaya luar yang bekerja pada sistem. Karena momentum adalah massa dikalikan dengan kecepatan, maka momentum dari sebuah partikel kecil ρdV adalah $\rho \mathbf{V} dV$ (Potter, 2008). Jadi momentum dari seluruh sistem $\int_{sys} \rho \mathbf{V} dV$ dan hukum Newton menjadi:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \mathbf{V} \rho d\mathcal{V} = \sum F_{sys} \quad (2.9)$$

Sistem koordinat atau acuan apapun di mana pernyataan ini berlaku disebut inersial. Sebuah sistem koordinat yang tetap adalah inersial. Sebuah koordinat sistem yang bergerak dalam sebuah garis lurus dengan kecepatan konstan, (tanpa percepatan), juga inersial. Kita selanjutnya mengembangkan rumus untuk volume kendali bagi hukum yang penting ini. Sebuah volume kendali dengan sebuah sistem pada suatu waktu, gaya-gaya yang bekerja pada sistem tersebut dan gaya-gaya yang bekerja pada kandungan dari volume kendali dalam sesaat menjadi identik, artinya:

$$\sum F_{sys} = \sum F_{kandungan \ volume \ kendali} \quad (2.10)$$

Lebih lanjut lagi, untuk sebuah sistem dan kandungan volume kendali yang tetap, Persamaan (2.3) dapat diterapkan dengan ketentuan n diganti dengan kecepatan dan M_{sys} atau massa sistem diganti dengan momentum sistem. Sehingga laju perubahan terhadap waktu dari momentum sistem linier sama dengan laju perubahan terhadap waktu dari momentum linier pada volume kendali ditambah dengan Laju aliran *netto* dari momentum linier melewati permukaan kendali.

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \mathbf{V} \rho d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \mathbf{V} \rho d\mathcal{V} + \int_{cs} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (2.11)$$

atau

Ketika partikel-partikel massa bergerak masuk atau keluar dari sebuah volume kendali melewati permukaan kendali, partikel-partikel tersebut membawa momentum linier masuk atau keluar. Jadi, aliran momentum kelihatannya tidak terlalu berbeda dengan aliran massa. Untuk volume atur yang tetap (yang inersial) dan tidak berdeformasi, Persamaan (2.9), (2.10) dan (2.11) menunjukkan bahwa pernyataan matematika yang tepat untuk hukum kedua Newton tentang gerak adalah

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \mathbf{V} \rho d\mathcal{V} + \int_{cs} \mathbf{V} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \sum F_{kandungan \ volume \ kendali} \quad (2.12)$$

Kita menyebut Persamaan (2.12) sebagai persamaan momentum linier.

2.5.3 Hukum Termodinamika

Hukum pertama termodinamika untuk sebuah sistem dinyatakan dengan kata-kata adalah laju pertambahan terhadap waktu dari energi sama dengan laju *netto* pertambahan perpindahan energi dari kalor ke dalam sistem ditambah dengan laju *netto* pertambahan energi dari kerja yang dipindahkan ke dalam sistem (Potter, 2008). Dalam bentuk simbolik, pernyataan ini menjadi:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sistem} e \rho dV = (\sum Q_{ke \text{ dalam}} - \sum Q_{ke \text{ luar}})_{sistem} + (\sum W_{ke \text{ dalam}} - \sum W_{ke \text{ luar}})_{sistem} \quad (2.13)$$

atau

$$\frac{D}{Dt} \int_{sistem} e \rho dV = (Q_{ke \text{ dalam netto}} + W_{ke \text{ dalam netto}})_{sistem} \quad (2.14)$$

Energi tersimpan total per satuan massa dari setiap partikel di dalam sistem e , dihubungkan dengan energi dalam per satuan massa, \tilde{u} , energi kinetik per satuan massa $\frac{v^2}{2}$, dan energi potensial per satuan massa gz , menurut persamaan

$$e = \tilde{u} + \frac{v^2}{2} + gz \quad (2.15)$$

Laju *netto* dari perpindahan kalor ke dalam sistem dinyatakan dengan $Q_{ke \text{ dalam netto}}$, laju *netto* perpindahan kerja ke dalam sistem dinyatakan dengan $W_{ke \text{ dalam netto}}$. Perpindahan kalor dan perpindahan kerja bernilai positif jika berlangsung ke dalam sistem dan negatif jika ke luar sistem. Persamaan (2.14) berlaku untuk sistem acuan inersial maupun tak inersial. Kita akan mengembangkan volume kendali pada hukum pertama termodinamika. Untuk volume kendali yang berimpit dengan sistem tersebut pada suatu saat

$$(Q_{ke \text{ dalam netto}} + W_{ke \text{ dalam netto}})_{sistem} = (Q_{ke \text{ dalam netto}} + W_{ke \text{ dalam netto}})_{volume \text{ kontrol berimpit}} \quad (2.16)$$

Selanjutnya untuk sistem dan kandungan volume kendali yang tetap, teorema transport Reynold Persamaan (2.6) dapat diterapkan dengan ketentuan n diganti dengan e dan M_{sys} diganti dengan energi tersimpan total dari suatu sistem. Sehingga laju pertambahan terhadap waktu dari energi tersimpan total dari suatu sistem sama dengan jumlahan dari laju pertambahan terhadap waktu dari energi tersimpan total pada kandungan volume kendali dan laju aliran *netto* dari energi tersimpan total keluar volume kendali melalui permukaan atur.

$$\frac{D}{Dt} \int_{sistem} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (2.17)$$

Dengan mengkombinasikan Persamaan (2.14), (2.15), (2.16), dan (2.17), kita dapatkan rumus volume kendali untuk hukum pertama termodinamika sebagai:

$$\int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = (Q_{ke \text{ dalam netto}} + W_{ke \text{ dalam netto}})_{cv} \quad (2.18)$$

2.6 Persamaan Maxwell

Sejarah telah mencatat bahwa hukum-hukum tentang elektrostatik, elektromagnetik dan elektro dinamik ditemukan pada awal abad ke-19. Beberapa dari hukum-hukum itu, seperti hukum Faraday dan hukum Ampere, secara sistematis telah disusun oleh Maxwell menjadi apa yang dikenal sekarang ini sebagai persamaan Maxwell (Arber, 2013). Khusus pada ruang vakum dan berlaku juga pada medium udara, persamaan Maxwell dinyatakan sebagai berikut:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.22)$$

dengan:

\mathbf{E} = vektor medan listrik

\mathbf{B} = vektor medan magnet

ϵ_0 = permitivitas listrik di udara

μ_0 = permeabilitas magnet di udara

2.6 Metode Beda Hingga Eksplisit FTCS

Metode ini menggunakan pendekatan beda terpusat (metode Leap-Frog) untuk derivatif ruangnya dan metode Euler maju untuk derivatif waktunya.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + o(\Delta t) + \left[\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \right] = 0$$

atau

$$u_j^{n+1} \approx u_j^{n+1} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (2.23)$$

dimana indeks bawah i menyatakan langkah ruang dan indeks atas n menyatakan langkah waktu.

2.6.1 Iterasi Gauss Seidel

Metode Gauss Seidel merupakan suatu modifikasi dari metode Jacobi, yaitu semua komponen-komponen terakhir yang dihitung dipergunakan. Skemanya adalah:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.24)$$

Dengan asumsi bahwa untuk langkah k , komponen-komponen $x_i^{(k)}, 1 \leq j \leq i - 1$, sudah diketahui

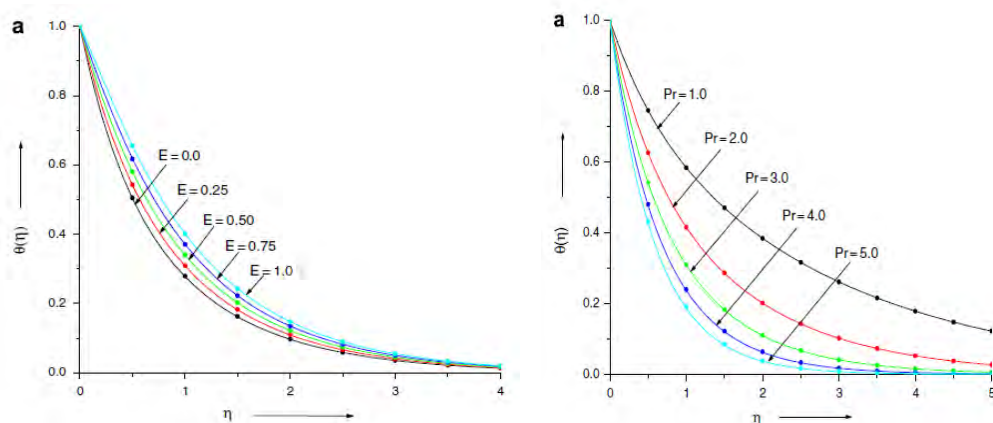
BAB 3

METODE PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang akan digunakan untuk mencapai tujuan penelitian.

1. Studi literatur

Pada bagian ini peneliti melakukan studi literatur terhadap hal-hal yang berkaitan dalam proses penelitian, misalnya literatur mengenai hidrodinamika magnetik, lapisan batas, dan penelitian terdahulu yang berkaitan dalam permasalahan ini. Penelitian terdahulu dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga untuk mendapatkan solusi numerik suatu model matematika dilakukan oleh Widodo, B., dkk (1997). Penelitian lainnya yang dilakukan pada jenis fluida viskoelastik oleh Abel (2008) menjelaskan mengenai pengaruh dari parameter seperti bilangan Prandtl dan bilangan Eckert terhadap temperatur fluida, hasil yang diperoleh adalah temperatur fluida berkurang seiring dengan kenaikan pada bilangan Prandtl akan tetapi temperaturnya bertambah seiring dengan bertambahnya bilangan Eckert. Gambar 3.1 mendeskripsikan grafik hubungan bilangan Prandtl dan bilangan Eckert terhadap temperatur fluida (Abel, 2008).



Gambar 3.1 Variasi Bilangan Eckert dan Prandtl
terhadap Profil Laju (Abel, 2008).

2. Membangun model matematika

Pada bagian ini dikaji model matematika pada hidrodinamika magnetik fluida viskoelastik yang melewati pelat datar. Setiap model mempunyai karakteristik tertentu. Sehingga untuk mengembangkan model perlu pengkajian terlebih dahulu untuk mendapatkan model yang sesuai dengan yang diharapkan. Persamaan momentum, kontinuitas, dan energi diperoleh dari hukum kekekalan massa, hukum kekekalan momentum, dan hukum kekekalan energi. Model yang diperoleh akan dirubah menjadi bentuk non-dimensional menggunakan fungsi alir (*stream function*). Setelah didapatkan model dalam bentuk non-dimensional, langkah selanjutnya adalah pendiskritan.

3. Diskritisasi model matematika

Model matematika akan diselesaikan menggunakan metode beda hingga eksplisit. Persamaan yang akan didiskritkan adalah persamaan momentum dan energi.

4. Membuat program

Pada tahap ini dilakukan implementasi dari algoritma yang telah dibuat sebelumnya ke dalam bentuk program dengan menggunakan program Matlab.

5. Running program

Program yang telah dibuat, dijalankan dengan memasukkan inputan dan dianalisa hasil numeriknya.

6. Verifikasi

Tahap pembangunan model matematika hidrodinamika magnetik fluida viskoelastik melewati pelat datar sampai pada hasil output program, diverifikasi kembali.

7. Simulasi

Dengan menggunakan program yang telah dibuat, dilakukan simulasi dengan menggunakan beberapa nilai pada parameter atau variabel inputan.

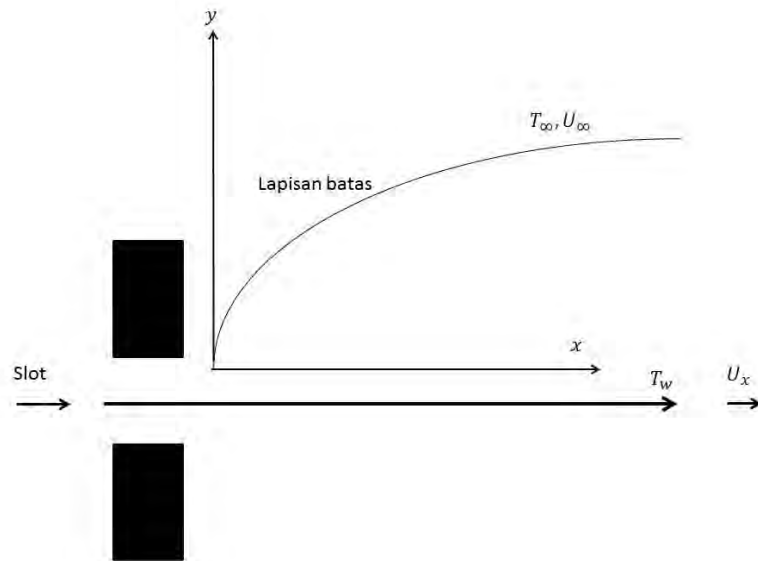
8. Analisis hasil dan pembahasan

Pada tahap ini dilakukan analisis hasil dan pembahasan untuk kemudian dicari solusi numerik terbaik dari model matematika yang diperoleh dan membuat kesimpulannya.

9. Pembuatan laporan Thesis

BAB 4 MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini diformulasikan tentang model matematika fluida viskoelastik yang alirannya berbentuk pelat datar. Pelat datar yang dialiri listrik akan menginduksi fluida menjadi medan magnet, hal inilah yang dinamakan dengan hidrodinamika magnetik pada fluida viskoelastik. Gambar 4.1 menunjukkan model fisik lapisan batas pada fluida viskoelastik yang melewati pelat datar.

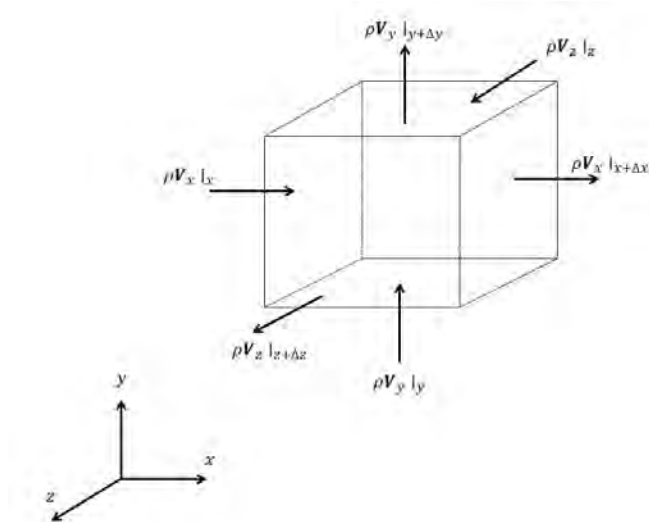


Gambar 4.1 Lapisan batas fluida viskoelastik pada pelat datar (Kasim, 2014)

Fluida visloekastik mengalir pada pelat dengan tipe aliran bebas. Aliran meluas pada arah sumbu x dan sumbu y pada pelat datar, U_w adalah kecepatan konstan, U_∞ adalah kecepatan aliran bebas. Berdasarkan permasalahan tersebut maka akan dibangun model matematika fluida viskoelastik pada pelat datar menggunakan hukum konservasi massa, hukum kedua Newton, dan hukum termodinamika.

4.1 Persamaan Konservasi Massa

Jika volume kendali pada Persamaan (2.11) digambarkan arah fluks massanya, maka akan didapatkan Persamaan (4.1). Gambar (4.2) mengilustrasikan fluks aliran massa pada volume kendali fluida viskoelastik.



Gambar 4.2 Aliran fluks massa pada volume kendali (Welty, dkk(1976))

$$\rho VA|_{out} - \rho VA|_{in} = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho(V_x|_{x+\Delta x} - V_x|_x)\Delta y\Delta z + \rho(V_y|_{y+\Delta y} - V_y|_y)\Delta x\Delta z + \rho(V_z|_{z+\Delta z} - V_z|_z)\Delta x\Delta y = 0$$

$$\frac{(\rho V_x|_{x+\Delta x} - \rho V_x|_x)}{\Delta x} + \frac{(\rho V_y|_{y+\Delta y} - \rho V_y|_y)}{\Delta y} + \frac{(\rho V_z|_{z+\Delta z} - \rho V_z|_z)}{\Delta z} = 0 = 0$$

Ketika alirannya tak-mampu mampat (*incompressible*), maka fluida yang mengalir tidak mengalami perubahan massa jenis sehingga massa jenisnya konstan dan $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

Dalam penelitian ini hanya pada arah lateral (x) dan vertikal (y) sehingga arah pada sumbu (z) diabaikan, maka Persamaan (4.2) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

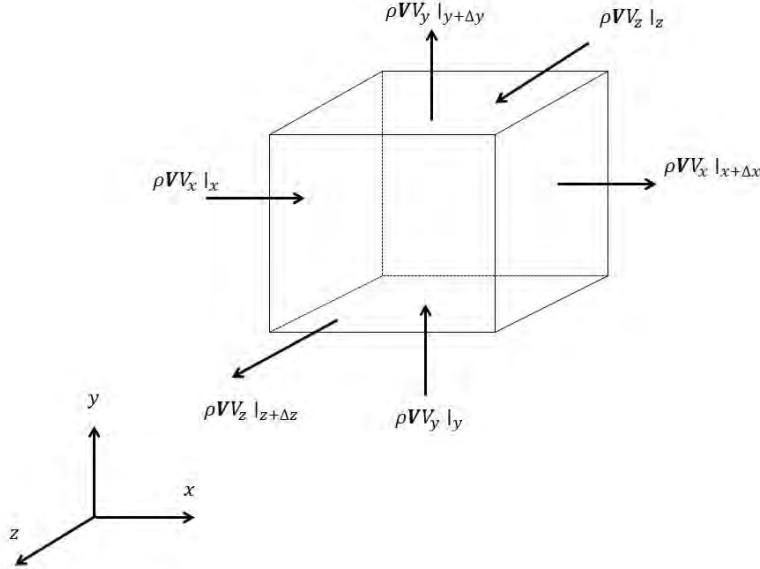
4.2 Persamaan Momentum

Jika volume kendali pada Persamaan (2.15) digambarkan arah fluks momentumnya, maka akan didapatkan Persamaan (4.4). Gambar (4.3) mengilustrasikan fluks aliran momentum pada volume kendali fluida viskoelastik.

$$V\rho VA|_{out} - V\rho VA|_{in} = \sum F \quad (4.4)$$

$$V\rho(V_x|_{x+\Delta x} - V_x|_x)\Delta y\Delta z + V\rho(V_y|_{y+\Delta y} - V_y|_y)\Delta x\Delta z + V\rho(V_z|_{z+\Delta z} - V_z|_z)\Delta x\Delta y = 0$$

$$\rho \mathbf{V} \frac{(V_x|_{x+\Delta x} - V_x|_x)}{\Delta x} + \rho \mathbf{V} \frac{(V_y|_{y+\Delta y} - V_y|_y)}{\Delta y} + \rho \mathbf{V} \frac{(V_z|_{z+\Delta z} - V_z|_z)}{\Delta z} = \frac{\Sigma F}{\Delta x \Delta y \Delta z} \quad (4.5)$$



Gambar 4.3 Aliran fluks momentum pada volume kendali (Welty, dkk(1976))

Karena dalam penelitian ini hanya pada arah lateral dan vertikal maka arah sumbu z diabaikan, $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$, dan massa jenisnya konstan pada aliran tak-mampu mampat (*incompressible*), maka Persamaan (4.5) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} V_x \right) \mathbf{V} + \rho \left(\frac{\partial}{\partial y} V_y \right) \mathbf{V} = \frac{\Sigma F}{\Delta x \Delta y \Delta z} \quad (4.6)$$

Gaya yang terdapat dalam penelitian ini terdiri dari 3 jenis gaya yaitu gaya viskositas, gaya tekanan, dan gaya gravitasi, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} V_x \right) \mathbf{V} + \rho \left(\frac{\partial}{\partial y} V_y \right) \mathbf{V} &= \frac{F_{viscous} + F_{press} + F_{grav}}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{V} &= \frac{F_{viscous} + F_{press} + F_{grav}}{\Delta x \Delta y \Delta z} \end{aligned} \quad (4.7)$$

dengan $\nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V}) + \mathbf{V} (\nabla \cdot \mathbf{V})$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\hat{x} V_x + \hat{y} V_y) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

berdasarkan persamaan kontinuitas pada kondisi tunak dan *incompressible* maka didapat,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \text{ sehingga}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V}) + \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V}) + 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V})$$

Persamaan (4.7) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\rho \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V}) = \frac{F_{viscous} + F_{press} + F_{grav}}{\Delta x \Delta y \Delta z} \quad (4.8)$$

dengan

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V}) &= \rho (\hat{x} V_x + \hat{y} V_y) \left[\left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\hat{x} V_x + \hat{y} V_y) \right] \\ &= \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

komponen $F_{viscous}$, F_{press} , dan F_{grav} pada Persamaan (4.8) diuraikan sebagai berikut:

a) Momentum pada arah x

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \Delta x \right) (\Delta y \Delta z) + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta y \right) (\Delta x \Delta z) - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) (\Delta y \Delta z) - \rho g (\Delta x \Delta y \Delta z) \right]}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \rho g \end{aligned} \quad (4.9)$$

Momentum pada arah y

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\left[\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \Delta x \right) (\Delta y \Delta z) + \left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \Delta y \right) (\Delta x \Delta z) - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \Delta y \right) (\Delta x \Delta z) - \rho g (\Delta x \Delta y \Delta z) \right]}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \rho g \end{aligned} \quad (4.10)$$

b) Tegangan geser pada fluida Walter-B menurut Tonekaboni (2011) adalah

$$\tau = 2\mu_0 \mathbf{d} - 2k_0 \hat{\mathbf{d}} \quad (4.11)$$

dengan μ_0 adalah viskositas dinamik, k_0 adalah koefisien muatan, \mathbf{d} adalah laju perubahan bentuk tensor, $\hat{\mathbf{d}}$ adalah variable turunan konveksi.

dengan $\hat{\mathbf{d}} = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{d} - \mathbf{d} \cdot (\nabla \mathbf{V})^T - (\nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{d}$, sehingga Persamaan (4.11) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\tau = 2\mu_0 \mathbf{d} - 2k_0 [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{d} - \mathbf{d} \cdot (\nabla \mathbf{V})^T - (\nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{d}] \quad (4.12)$$

Komponen regangan dalam kondisi tak-tunak (*unsteady state*) dari tensor dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\tau_{ij} = 2\mu_0 \mathbf{d}_{ij} - 2k_0 \left[(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{d}_{ij} - \frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_m} \mathbf{d}_{im} - \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_m} \mathbf{d}_{mj} \right] \quad (4.13)$$

$$\text{dengan } \mathbf{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_i} \right]$$

untuk $i = x$ dan $j = x$ maka Persamaan (4.13) menjadi

$$\begin{aligned} 1. \tau_{xx} &= 2\mu_0 (d_{xx}) - 2k_0 \left[(\mathbf{V} \cdot \nabla) d_{xx} - \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x_x} d_{xx} + \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x_y} d_{xy} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x_x} d_{xx} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x_y} d_{yx} \right) \right] \\ \tau_{xx} &= 2\mu_0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right] \\ \tau_{xx} &= 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0 \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \\ \tau_{xx} &= 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0 \left[\left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \quad (4.14) \end{aligned}$$

$$2. \tau_{xy} = \tau_{yx} =$$

$$\begin{aligned} &2\mu_0 (d_{xy}) - 2k_0 \left[(\mathbf{V} \cdot \nabla) d_{xy} - \left(\frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial x_x} d_{xx} + \frac{\partial \mathbf{V}_y}{\partial x_y} d_{xy} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x_x} d_{xy} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial x_y} d_{yy} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= 2\mu_0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} =$$

$$\begin{aligned} &\mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[\frac{u}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} =$$

$$\mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[\frac{u}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right]$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} =$$

$$\mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[\frac{u}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right]$$

Berdasarkan

persamaan konservasi massa $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} =$$

$$\mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[\frac{u}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (4.15)$$

3. $\tau_{yy} = 2\mu_0(d_{yy}) - 2k_0 \left[(\mathbf{V} \cdot \nabla) d_{yy} - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x_x} d_{yx} + \frac{\partial v_x}{\partial x_y} d_{yy} \right) - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x_x} d_{xy} + \frac{v_y}{\partial x_y} d_{yy} \right) \right]$

$$\tau_{yy} = 2\mu_0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2k_0 \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right]$$

$$\tau_{yy} = 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$$

$$\tau_{yy} = 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[\left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$$

$$\tau_{yy} = 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[\left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - 2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \quad (4.16)$$

c) Turunan tensor tegangan $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \text{ dan } \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$ sebagai berikut

(Terlampir pada lampiran 1)

$$1. \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = 2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_0 \left(-6 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (4.17)$$

$$2. \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.18)$$

$$3. \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.19)$$

$$4. \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_0 \left(2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} + 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 4 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.20)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (4.17) dan Persamaan (4.18) ke dalam Persamaan (4.9),

Persamaan (4.19) dan Persamaan (4.20) ke dalam Persamaan (4.10), (Terlampir pada lampiran 2)

maka akan diperoleh persamaan momentum pada sumbu x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_x \quad (4.21)$$

dan Persamaan momentum pada sumbu y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_y \quad (4.22)$$

d) Gaya Magnetik

Volume force pada fluida menyebabkan beberapa gaya bekerja pada fluida, yaitu gaya grafitasi dan gaya magnet. Berdasarkan Ahmed (2012), $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$ didefinisikan dengan

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$$

dengan:

g : gaya grafitasi

\mathbf{J} : arus listrik

\mathbf{B}_0 : vektor medan magnet

\mathbf{b} : magnet terinduksi

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$$

Ketika bilangan Reynold kecil maka medan elektrik dan medan magnetik terinduksi diabaikan, sehingga Persamaan (4.23) menjadi:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \quad (4.24)$$

dengan :

σ : konduktivitas listrik

B_0 : medan magnet

Substitusi Persamaan (4.24) ke dalam Persamaan (4.23) maka akan didapat gaya magnetik yang bekerja pada fluida

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} + \sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 \quad (4.25)$$

Didapatkan persamaan magnetik untuk model matematika dari Persamaan (4.25) sebagai berikut : (Terdapat pada Lampiran 2))

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} + \sigma(-uB_0^2 \mathbf{i}, -vB_0^2 \mathbf{j}, 0)$$

Dengan menambahkan gaya magnet pada fluida, maka akan didapatkan persamaan momentum fluida viskoelastik yang melewati pelat datar sebagai berikut:

persamaan momentum pada sumbu x

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_x - \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2$$

persamaan momentum pada sumbu y

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_y - \frac{1}{\rho} \sigma v B_0^2$$

Persamaan momentum pada arah y diabaikan karena tidak terdapat gaya gravitasi (*body forces*) dan kecepatan $v \ll u$, sehingga $\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{\partial v}{\partial y} \approx 0$. Oleh karena itu dalam penelitian kali ini yang akan digunakan adalah kecepatan pada arah sumbu x sebagai berikut

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - g_x - \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2 \quad (4.26)$$

4.3 Persamaan Lapisan Batas

Pada persamaan lapisan batas akan dilakukan penyederhanaan persamaan menggunakan pendekatan sebagai berikut:

$$u \sim 1, x \sim 1, v \sim \Delta, y \sim \Delta, \frac{k_0}{\rho} \sim \Delta^2, \frac{\mu_0}{\rho} \sim \Delta^2, \sigma \sim \frac{1}{\Delta^2}, B_0^2 \sim \Delta^2, g \sim 1$$

dengan menerapkan pendekatan pada persamaan lapisan batas, maka akan didapatkan persamaan momentum pada lapisan batas sumbu x , (terdapat pada lampiran 3):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2 \quad (4.27)$$

4.4 Penurunan Persamaan Energi

Penurunan persamaan energi didapat dari hukum pertama termodinamika, persamaan umum energi adalah

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e\mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \dot{q} + \Lambda \quad (4.28)$$

dengan

$\nabla \cdot e\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla e) + e(\nabla \cdot \mathbf{V})$, berdasarkan persamaan kontinuitas, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, sehingga

$$\nabla \cdot e\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla e) + 0$$

$$\nabla \cdot e\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla e)$$

Maka Persamaan (4.29) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla e) \right) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \dot{q} + \Lambda \quad (4.29)$$

dengan \dot{q} adalah konduktivitas termal, pada penelitian kali ini mengabaikan terjadinya pembentukan kalor, sehingga nilai dari $\dot{q} = 0$ dan Λ adalah *dissipation function* (Welty, 1976)

$$\Lambda = \mathbf{V} \cdot \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \Phi \quad (4.30)$$

dengan

$$\Phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Pada keadaan tunak, perubahan kerapatan dan pengaruh dari tekanan fluida diabaikan sehingga persamaan energi dapat didekati dengan perubahan entalpi sebagai berikut:

$$\partial \nabla = \partial e - \partial \left(\frac{P}{\rho} \right) \approx \partial e \quad (4.31)$$

dengan mensubstitusikan $\partial e \approx C_p \partial T$ ke dalam Persamaan (4.29) maka akan diperoleh persamaan

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Lambda \quad (4.32)$$

dengan

$$\mathbf{V} \cdot (\nabla T) = \mathbf{V} \cdot (\nabla T) + \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{V}) \quad (4.33)$$

sesuai dengan persamaan kontinuitas, maka

$$\mathbf{V} \cdot (\nabla T) = \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \quad (4.34)$$

Persamaan (4.34) akan disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.32) maka akan diperoleh persamaan

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Lambda \quad (4.35)$$

dengan

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot (\nabla T) &= (\hat{i}v_x + \hat{j}v_y) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &= \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &= \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k \nabla T) &= k \nabla \cdot (\nabla T) \\ &= k \nabla^2 T \\ &= k \left[\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\ &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

mensubstitusikan Persamaan (4.30) ke dalam Persamaan (4.35), maka akan diperoleh persamaan energi sebagai berikut:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{v}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4.36)$$

dengan:

α : diffusif termal

C_p : panas pada tekanan konstan

4.5 Kondisi Batas

$$u = U_x, \quad v = V_x(x), \quad T = T_w \quad \text{pada } y = 0$$

$$u = U_\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad T = T_\infty \quad \text{pada } y \rightarrow \infty$$

4.6 Fungsi Alir (*Stream function*)

Selanjutnya akan digunakan fungsi alir untuk merubah menjadi bentuk non-dimensional. Fungsi alir berdasarkan Kasim (2014) didapatkan persamaan :

$$\begin{aligned} \psi &= U_\infty x v (2)^{\frac{1}{2}} f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \\ \eta &= \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} y \end{aligned} \tag{4.37}$$

dimana fungsi alir didefinisikan sebagai:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4.38}$$

dengan menggunakan Persamaan (4.37) dan (4.38) maka akan didapatkan komponen kecepatan pada sumbu x :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(2U_\infty x v)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \right] \\ &= (2U_\infty x v)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \eta} (f(\eta)) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= (2U_\infty x v)^{\frac{1}{2}} \cdot f' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= U_\infty \cdot f' \end{aligned}$$

dan kecepatan sumbu y :

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \left[(2U_\infty x v)^{\frac{1}{2}} f(\eta) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[\frac{1}{2} (2U_{\infty} x v)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot f + (2U_{\infty} x v)^{\frac{1}{2}} \cdot f' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2v} \right)^{\frac{1}{2}} y \cdot \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) \right] \\
&= - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2U_{\infty} v}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot f + (2U_{\infty} x v)^{\frac{1}{2}} \cdot f' \cdot \eta \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right) \right] \\
&= - \left(\frac{2U_{\infty} v}{4x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot f - \left(\frac{2U_{\infty} v}{4x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot f' \cdot \eta \\
&= - \left(\frac{U_{\infty} v}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} (f - f' \cdot \eta)
\end{aligned}$$

Untuk mencari persamaan kontinuitas, momentum, dan energi diperlukan penurunan kecepatan terhadap sumbu x dan sumbu y :

$$\begin{aligned}
\text{a) } \frac{\partial u}{\partial x} &= U_{\infty} \cdot f'' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2v} \right)^{\frac{1}{2}} y \cdot \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) \\
&= U_{\infty} \cdot f'' \cdot \eta \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right) \\
&= -\frac{U_{\infty}}{2x} \cdot f'' \cdot \eta \\
\text{b) } \frac{\partial v}{\partial y} &= \left[- \left(\frac{U_{\infty} v}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (f - f' \cdot \eta) \right] \\
&= - \left(\frac{U_{\infty} v}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \left[f' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(f'' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \eta + f' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \\
&= - \left(\frac{U_{\infty} v}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \left[f' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} - f'' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \eta - f' \cdot \left(\frac{U_{\infty}}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= \frac{U_{\infty}}{2x} \cdot f'' \cdot \eta
\end{aligned}$$

Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

dengan memasukkan fungsi alir ke dalam persamaan kontinuitas didapat

$$-\frac{U_{\infty}}{2x} \cdot f'' \cdot \eta + \frac{U_{\infty}}{2x} \cdot f'' \cdot \eta = 0$$

untuk persamaan energi:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [\theta(\eta)(T_W - T_{\infty}) + T_{\infty}] \\
&= (T_W - T_{\infty}) \cdot \theta' \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \left(\frac{U_{\infty}}{2v} \right)^{\frac{1}{2}} y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (T_W - T_\infty) \cdot \theta' \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) \left(\frac{U_\infty}{2vx}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \\
&= (T_W - T_\infty) \cdot \theta' \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) \cdot \eta \\
\text{b) } \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [\theta(\eta)(T_W - T_\infty) + T_\infty] \\
&= \theta' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2vx}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (T_W - T_\infty) \\
\text{c) } \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\theta' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2vx}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (T_W - T_\infty) \right] \\
&= \theta'' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2vx}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{U_\infty}{2vx}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (T_W - T_\infty) \\
\text{d) } \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 &= U_\infty^2 (f'')^2 \cdot \frac{U_\infty}{2vx}
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan fungsi alir ke dalam Persamaan (4.36), (Terlampir pada lampiran 2) maka didapat persamaan energi dalam bentuk non-dimensional sebagai berikut

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' + E_c (f'')^2 = 0$$

Persamaan momentum dengan fungsi alir didapat :

Suku-suku pada Persamaan (4.28) dapat diuraikan menjadi persamaan-persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
\text{a. } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right) (f \cdot f'') \\
\text{b. } \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] &= \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{U_\infty^2}{2xv}\right) \cdot f''' \\
\text{c. } \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2 &= \frac{1}{\rho} \sigma (U_\infty^2 \cdot f') B_0^2
\end{aligned}$$

$$\frac{\sigma B_0^2}{\rho} U_\infty = M \text{ adalah parameter magnetik, maka akan didapatkan persamaan}$$

$$\frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2 = M \cdot f'$$

$$\begin{aligned}
\text{d. } \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = \frac{k_0}{\rho} \left[\left((U_\infty \cdot f') \left(\frac{U_\infty^2}{2v} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot f''' + \right. \right. \\
\left. \left. \frac{U_\infty^2}{2xv} \cdot \eta \cdot f'''' \left(-\frac{1}{2x} \right) \right) + \left(\left(-\left(\frac{U_\infty \cdot v}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot (f - f' \cdot \eta) \left(\frac{U_\infty^2}{2xv} \cdot f'''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) + \right. \\
\left. \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2x} \right) (f'')^2 \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) + \left(\frac{U_\infty^2}{2x} \right) \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'' \cdot f'''' \right) + \left(\left(-\frac{U_\infty^2}{2x} \right) \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'' \cdot f'''' \right) \right]
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan persamaan-persamaan (a), (b), (c), dan (d) ke Persamaan (4.27), maka diperoleh persamaan Non-dimensional untuk momentum sebagai berikut:

$$f''' + ff'' + \frac{K}{2} [ff'''' + 2f'f''' - (f'')^2] - Mf' = 0$$

Sehingga diperoleh model matematika aliran konveksi bebas fluida viskoelastik yang melewati pelat datar adalah sebagai berikut.

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + f\theta' + Ec(f'')^2 = 0 \quad (4.39)$$

$$f''' + ff'' + \frac{K}{2} [ff'''' + 2f'f''' - (f'')^2] - Mf' = 0 \quad (4.40)$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned}
f(0) = f_w \quad f'(0) = \lambda_m \quad f'(\infty) = 1 \\
f''(\infty) = 0, \quad \theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0
\end{aligned}$$

BAB 5

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

5.1 Diskritisasi Model

Berikut ini adalah model yang diperoleh pada persamaan sebelumnya

$$\frac{1}{P_r} \theta'' + f \theta' + E_c (f'')^2 = 0$$

$$f''' + f f'' + \frac{K}{2} [f f'''' + 2 f' f''' - (f'')^2] - M f' = 0$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} f(0) &= f_w & f'(0) &= \lambda_m & f'(\infty) &= 1 \\ f''(\infty) &= 0, & \theta(0) &= 1, & \theta(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

Model matematika yang diperoleh akan didiskritisasi menggunakan skema beda pusat, berikut adalah rumus diskritisasi dari turunan pertama sampai turunan ke empat dari suatu persamaan differensial.

1. Pendekatan beda pusat turunan pertama

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \quad (5.1)$$

2. Pendekatan beda pusat turunan kedua

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y)^2 \quad (5.2)$$

3. Pendekatan beda pusat turunan ketiga

$$\left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta y^3} + O(\Delta y)^2 \quad (5.3)$$

4. Pendekatan beda pusat turunan keempat

$$\left. \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta y^4} + O(\Delta y)^2 \quad (5.4)$$

Model diskrit persamaan energi akan dicari dengan cara mensubstitusikan Persamaan (5.1)-(5.4) ke dalam Persamaan (4.39), maka akan diperoleh

$$I\theta_{i+1} + J\theta_{i-1} - 2I\theta_i + Ec.r_2(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) = 0 \quad (5.5)$$

dengan memisalkan

$$I = \frac{1}{(\Delta y^2)Pr}, \quad J = \left(\frac{1}{(\Delta y^2)Pr} - \frac{r_1}{\Delta y} \right) f_i$$

Metode iterasi Gauss Seidel digunakan untuk mendapatkan nilai θ_i pada Persamaan (5.5). Setelah menggunakan iterasi Gauss Seidel maka akan diperoleh diskritisasi dari Persamaan (5.5) sebagai berikut

$$\theta_i = (I\theta_{i+1} + J\theta_{i-1} + Ec.r_2(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}))/2I \quad (5.6)$$

Setelah dilakukan pendiskritan, maka langkah selanjutnya adalah menentukan kondisi batas pada pada setiap titik ketika iterasi dilakukan pada model.

- a) Saat $i = 1$, dengan menggunakan beda pusat maka nilai dari $\theta_{i-1} = (\theta_{i+1} - 2(\Delta y))$ dan $f_{i-1} = f_w$ sehingga diperoleh persamaan

$$\theta_i = (I\theta_{i+1} + J(\theta_{i+1} - 2(\Delta y)) + Ec.r_2(f_{i+1} - 2f_i + f_w))/2I$$

- b) Saat $i = N$, dengan menggunakan beda pusat maka nilai dari $\theta_{i+1} = 0$ dan $f_{i+1} = (f(N-1) + 2(\Delta y))$ sehingga diperoleh persamaan

$$\theta_i = (I.0 + J\theta_{i-1} + Ec.r_2((f(N-1) + 2(\Delta y)) - 2f_i + f_{i-1}))/2I$$

Pada Persamaan (4.49) akan dilakukan cara pendiskritan yang sama dan didapatkan hasil sebagai berikut

$$A(f_{i+1} - f_{i-1}) + r_3(f_{i+2} - f_{i-2}) + r_2(f_i f_{i+1} + f_i f_{i-1}) + C(f_i)^2 + \frac{K}{2}[r_4 f_i(f_{i+2} - f_{i-2}) + G(f_{i+2} f_{i+1} - f_{i-2} f_{i+1} - f_{i+2} f_{i-1} + f_{i-2} f_{i-1}) + E((f_{i+1})^2 + (f_{i-1})^2) + F(f_{i+1} - f_{i-1})] = 0$$

dengan menggunakan iterasi Gauss seidel, maka didapat

$$f_i = \left[-A(f_{i+1} - f_{i-1}) - r_3(f_{i+2} - f_{i-2}) - r_2(f_i f_{i+1} + f_i f_{i-1}) - \frac{K}{2}(r_4 f_i(f_{i+2} - f_{i-2}) + G(f_{i+2} f_{i+1} - f_{i-2} f_{i+1} - f_{i+2} f_{i-1} + f_{i-2} f_{i-1}) + E((f_{i+1})^2 + (f_{i-1})^2) + F(f_{i+1} - f_{i-1})) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

dengan memisalkan

$$A = \left(-\frac{1}{\Delta y^3} - \frac{M}{2\Delta y} \right), \quad C = \left(K \frac{1}{\Delta y^4} - \frac{2}{\Delta y^2} \right), \quad E = \left(-\frac{1}{\Delta y \Delta y^3} - \frac{1}{\Delta y^4} \right), \quad G = \frac{1}{2\Delta y \Delta y^3}$$

$$F = \left(\frac{2}{\Delta y \Delta y^3} - \frac{2}{\Delta y^4} \right), \quad r_3 = \frac{1}{2\Delta y^3}, \quad r_2 = \frac{1}{\Delta y^2}$$

Setelah dilakukan pendiskritan, maka langkah selanjutnya adalah menentukan kondisi batas pada pada setiap titik ketika iterasi dilakukan pada model.

- a) Saat $i = 1$, dengan menggunakan beda pusat maka nilai dari $f_{i-2} = (f(1) - 2(\Delta y)\lambda_m)$ dan $f_{i-1} = f_w$ sehingga diperoleh persamaan

$$f_i = \left[-A(f_{i+1} - f_w) - r_3(f_{i+2} - (f(1) - 2(\Delta y)\lambda_m)) - r_2(f_i f_{i+1} + f_i f_w) - \frac{K}{2}(r_4 f_i(f_{i+2} - (f(1) - 2(\Delta y)\lambda_m)) + G(f_{i+2} f_{i+1} - (f(1) - 2(\Delta y)\lambda_m) f_{i+1} - f_{i+2} f_w + (f(1) - 2(\Delta y)\lambda_m) f_w) + E((f_{i+1})^2 + (f_w)^2) + F(f_{i+1} - f_w)) \right]^{\frac{1}{2}}$$

- b) Saat $i = 2$, dengan menggunakan beda pusat maka nilai dari $f_{i-2} = (f(2) - 2(\Delta y)f_w)$ sehingga diperoleh persamaan

$$f_i = \left[-A(f_{i+1} - f_{i-1}) - r_3(f_{i+2} - (f(2) - 2(\Delta y)f_w)) - r_2(f_i f_{i+1} + f_i f_{i-1}) - \frac{K}{2}(r_4 f_i(f_{i+2} - (f(2) - 2(\Delta y)f_w)) + G(f_{i+2} f_{i+1} - f_{i-2} f_{i+1} - f_{i+2} f_{i-1} + (f(2) - 2(\Delta y)f_w) f_{i-1}) + E((f_{i+1})^2 + (f_{i-1})^2) + F(f_{i+1} - f_{i-1})) \right]^{\frac{1}{2}}$$

- c) Saat $i = N-1$, dengan menggunakan beda pusat maka nilai dari $f_{i+2} = (f(N-1) - 2(\Delta y))$ dan $f_{i-1} = f_w$ sehingga diperoleh persamaan

$$f_i = \left[-A(f_{i+1} - f_w) - r_3(f_{i+2} - (f(N-1) - 2(\Delta y))) - r_2(f_i f_{i+1} + f_i f_w) - \frac{K}{2}(r_4 f_i(f_{i+2} - (f(N-1) - 2(\Delta y))) + G(f_{i+2} f_{i+1} - (f(N-1) - 2(\Delta y)) f_{i+1} - f_{i+2} f_w + (f(N-1) - 2(\Delta y)) f_w) + E((f_{i+1})^2 + (f_w)^2) + F(f_{i+1} - f_w)) \right]^{\frac{1}{2}}$$

- d) Saat $i = N$, dengan menggunakan beda pusat maka nilai dari $f_{i+1} = (f(N-1) + 2(\Delta y))$ dan $f_{i+2} = (f(N) + 2(\Delta y))$ sehingga diperoleh persamaan

$$f_i = \left[-A((f(N-1) + 2(\Delta y)) - f_{i-1}) - r_3((f(N) + 2(\Delta y)) - f_{i-2}) - r_2(f_i(f(N-1) + 2(\Delta y)) + f_i f_{i-1}) - \frac{K}{2}(r_4 f_i((f(N) + 2(\Delta y)) - f_{i-2}) + G((f(N) + 2(\Delta y))(f(N-1) + 2(\Delta y)) - f_{i-2}(f(N-1) + 2(\Delta y)) - (f(N) +$$

$$2(\Delta y))f_{i-1} + f_{i-2}f_{i-1}) + E((f(N-1) + 2(\Delta y))^2 + (f_{i-1})^2) + F((f(N-1) + 2(\Delta y)) - f_{i-1}))\Big]^{\frac{1}{2}}$$

5.2 Algoritma Program

Pada penelitian ini disimulasikan beberapa parameter untuk memperoleh profil tentang perubahan kecepatan fluida dan temperatur fluida. Algoritma dalam pembuatan simulasi numerik adalah sebagai berikut:

Input : nilai variasi parameter viskoelastik (K), parameter bilangan Pradntl (Pr), parameter magnetik (M), dan parameter bilangan Eckert (Ec).

Procedure

Kondisi awal (*initial condition*) f_i , θ_i , λ_m dan f_w

for $i = 1$ to N

if $i = 1$

$$f_i \leftarrow f_{i-1} = f_w \text{ dan } f_{i-2} = (f(1) - 2(\Delta y)\lambda_m)$$

$$\theta_i \leftarrow \theta_{i-1} = (\theta_{i+1} - 2(\Delta y))$$

if $i = 2$

$$f_i \leftarrow f_{i-2} = (f(2) - 2(\Delta y)f_w)$$

if $i = N-1$

$$f_i \leftarrow f_{i+2} = (f(N-1) - 2(\Delta y)) \text{ dan } f_{i-1} = f_w$$

if $i = N$

$$f_i \leftarrow f_{i+1} = (f(N-1) + 2(\Delta y)) \text{ dan } f_{i+2} = (f(N) + 2(\Delta y))$$

$$\theta_i \leftarrow \theta_{i+1} = 0$$

else

$$f_i = \left[-A(f_{i+1} - f_{i-1}) - r_3(f_{i+2} - f_{i-2}) - r_2(f_i f_{i+1} + f_i f_{i-1}) - \frac{K}{2}(r_4 f_i (f_{i+2} - f_{i-2}) + G(f_{i+2} f_{i+1} - f_{i-2} f_{i+1} - f_{i+2} f_{i-1} + f_{i-2} f_{i-1}) + E((f_{i+1})^2 + (f_{i-1})^2) + F(f_{i+1} - f_{i-1})) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_i = (I\theta_{i+1} + J\theta_{i-1} + Ec.r_2(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}))/2I$$

end for

output : f_i dan θ_i

5.3 Hasil simulasi

Pada bagian ini, ditunjukkan profil temperatur dan kecepatan aliran fluida dengan variasi bilangan Prandtl, Parameter magnetik, bilangan Euckert, dan nilai viskosnya.

Berikut akan diberikan data pada penelitian sekarang dan penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Kasim (2014). Nilai parameter-parameter yang digunakan adalah $\lambda_m = 0$, $K = 0$, $Pr = 0.7$, $Ec = 0$ dan $f_w = 0$. Simulasi dilakukan pada saat $\eta = 0$ yaitu pada posisi diatas pelat. Temperatur pada fluida ditampilkan dalam tabel berikut:

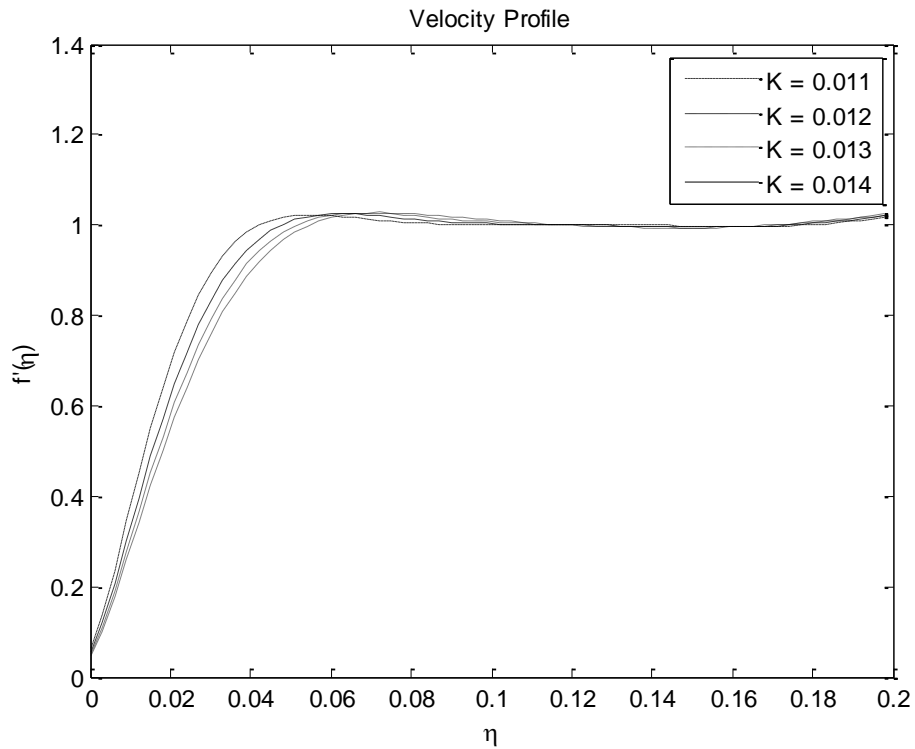
Profil Temperatur	Kasim (2014)	Penelitian Sekarang
θ	0.493630	0.4971

Tabel 5.1 Profil Temperatur pada saat $Pr = 0.7$, $Ec = 0$

Berdasarkan hasil yang diperoleh terdapat selisih ± 0.03 . Selisih ± 0.03 terjadi dikarenakan metode yang digunakan pada penelitian kali ini adalah metode beda hingga dengan orde dua sedangkan pada penelitian Kasim (2014) menggunakan beda hingga orde pertama.

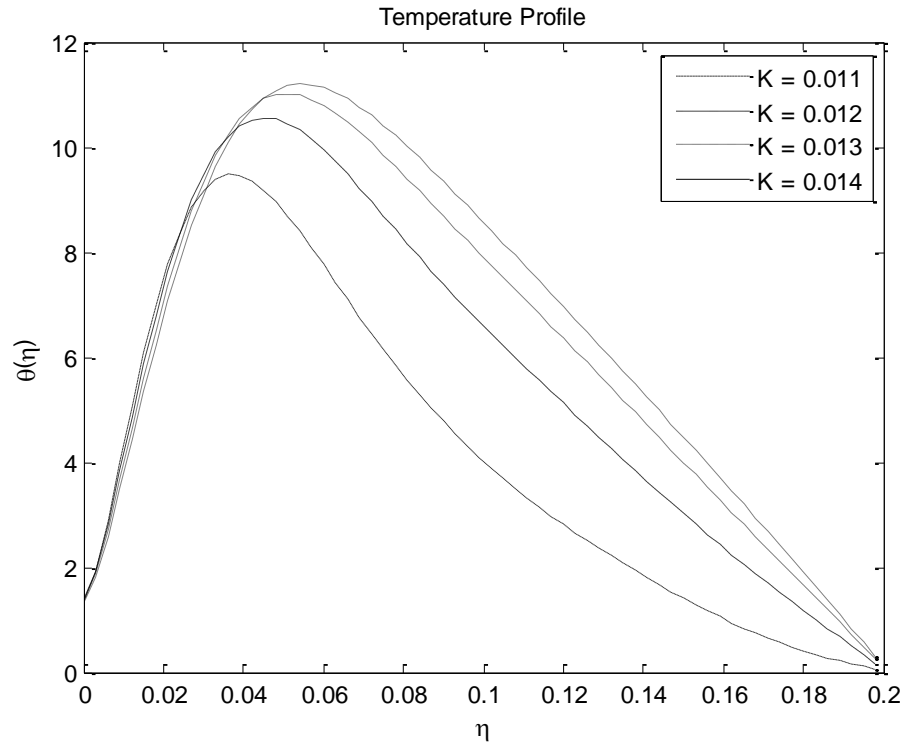
5.3.1 Pengaruh variasi parameter viskoelastik (K) terhadap Profil temperatur dan Profil Kecepatan

Nilai parameter viskoelastik yang digunakan adalah $K = 0.011, 0.012, 0.013, 0.014$ sedangkan nilai parameter lain yang digunakan adalah $M = 2$, $Ec = 2$, $f_w = 0$, $\lambda_m = 0.5$, $Pr = -6$.



Gambar 5.1 Variasi parameter viskoelastik terhadap Profil Kecepatan

Kecepatan dari fluida akan menurun seiring dengan bertambahnya nilai pada parameter viskoelastik, hal ini terjadi karena dengan bertambahnya nilai pada parameter akan menyebabkan kekentalan fluida bertambah sehingga akan memperbesar gaya gesek pada fluida dengan permukaan pelat yang pada akhirnya akan memperlambat laju dari fluida tersebut, hal ini ditunjukkan pada Gambar 5.1.

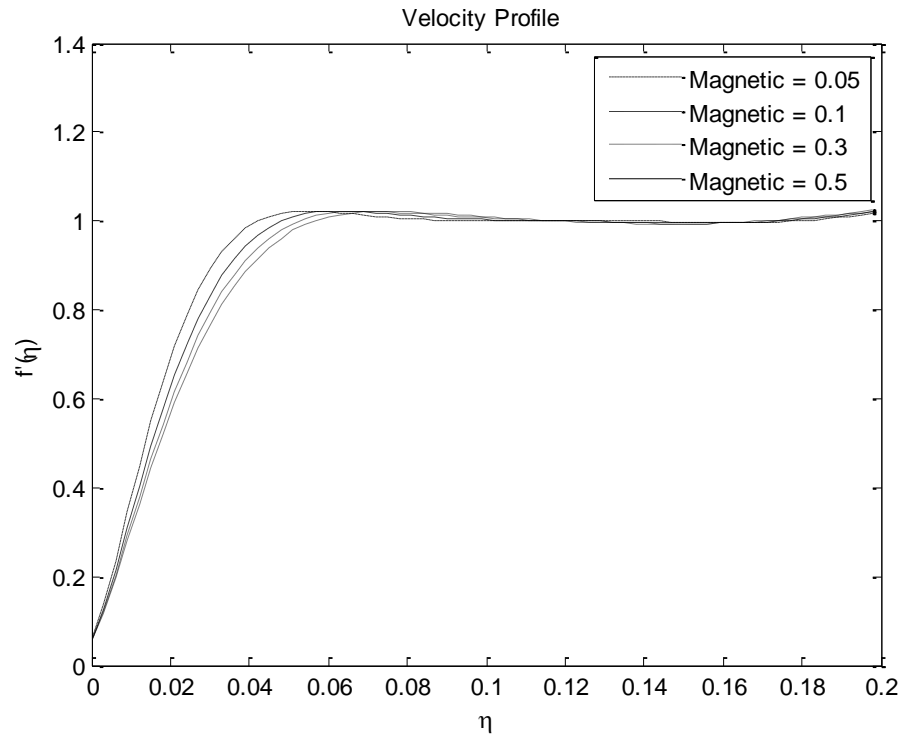


Gambar 5.2 Pengaruh variasi parameter viskoelastik terhadap Profil Temperatur

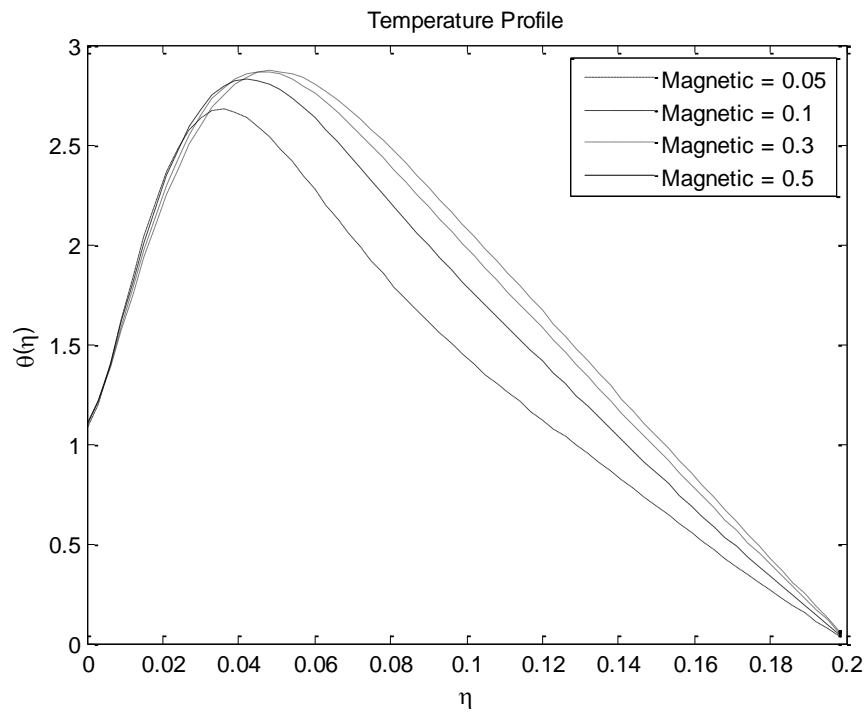
Besarnya gaya gesek yang terjadi pada fluida menyebabkan temperatur pada fluida menjadi naik, hal ini dapat ditunjukkan pada Gambar 5.2.

5.3.2 Pengaruh variasi parameter Magnetik M terhadap Profil temperature dan Profil Kecepatan

Nilai parameter magnetik yang digunakan adalah $M = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5$ sedangkan nilai parameter lain yang digunakan adalah $Pr = -3$, $K = 0.011$, $fw = 0$, $Ec = 1$, $\lambda_m = 0.5$. Besar temperatur akan naik seiring dengan bertambahnya nilai parameter magnetik, hal ini terjadi karena adanya medan magnet menimbulkan gaya Lorentz. Meningkatnya gaya Lorentz akan memperbesar gesekan diantara fluida dengan permukaan pelat, sehingga akan menurunkan kecepatan pada fluida, Gambar 5.3.



Gambar 5.3 Pengaruh variasi parameter magnetik terhadap Profil Kecepatan

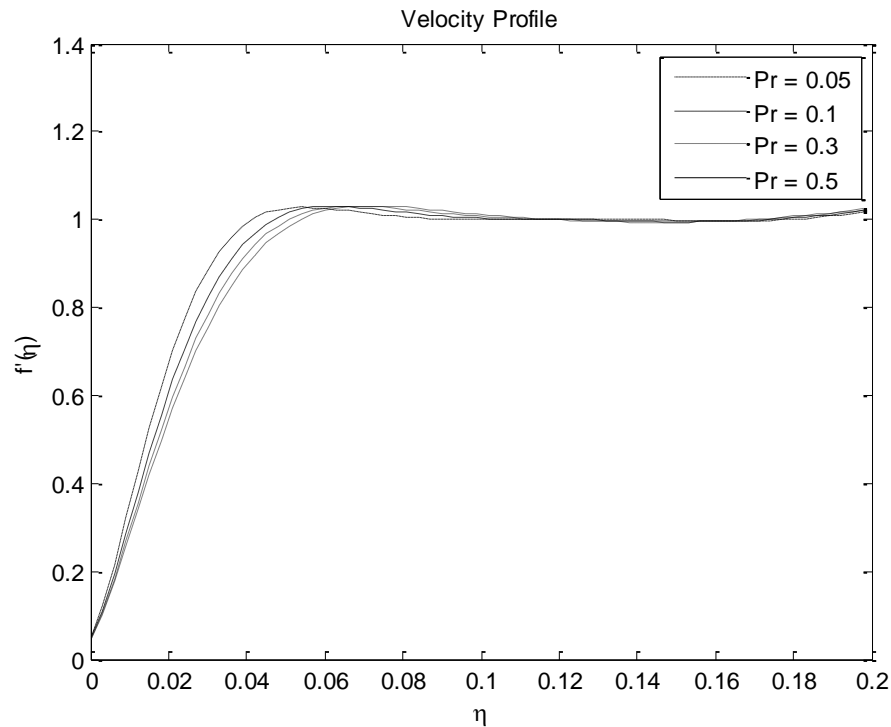


Gambar 5.4 Pengaruh variasi parameter magnetik terhadap Profil Temperatur

Gesekan yang semakin besar antara fluida dengan permukaan pelat akan menyebabkan temperatur pada fluida naik, Gambar 5.4.

5.3.3 Pengaruh variasi Bilangan Pradntl Pr terhadap Profil temperature dan Profil Kecepatan

Berikut ini akan diberikan variasi bilangan Pradntl terhadap Profil Temperatur, nilai bilangan Pradntl yang digunakan adalah $Pr = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5$ sedangkan nilai parameter lain yang digunakan adalah $M = 2$, $K = 0.014$, $f_w = 0$, $Ec = 0.3$, $\lambda_m = 0.5$.

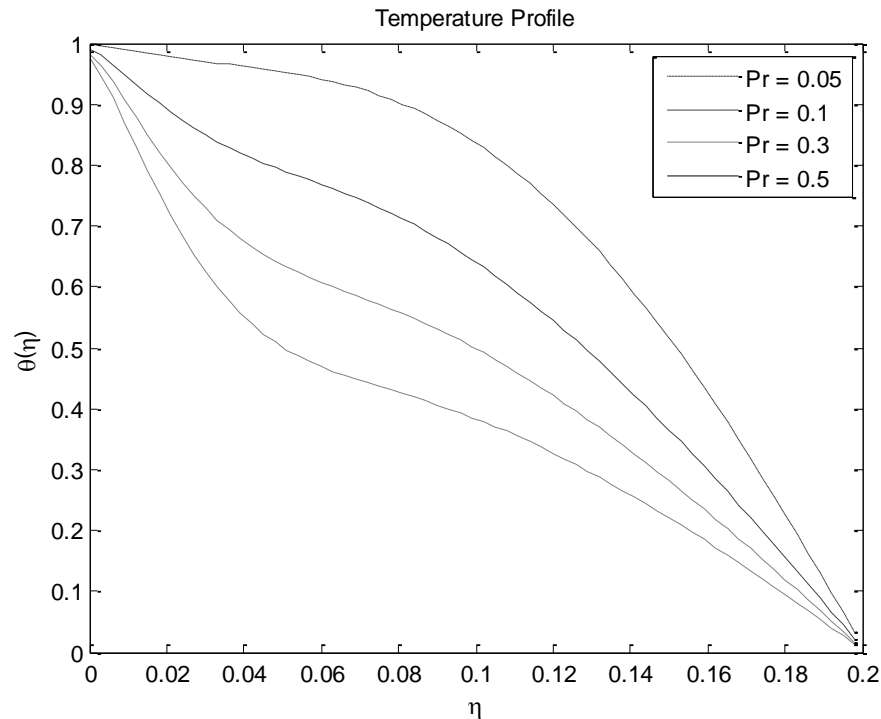


Gambar 5.5 Pengaruh variasi bilangan Pradntl terhadap Profil Kecepatan

Bertambahnya nilai pada bilangan akan menyebabkan kecepatan fluida menurun, hal ini dikarenakan bilangan Pradntl berbanding lurus dengan viskositas kinematik fluida ($Pr \sim \nu$) dan viskositas kinematik berbanding terbalik dengan parameter viskoelastik ($\nu \sim \frac{1}{K}$) sedangkan parameter viskoelastik berbanding terbalik dengan kecepatan fluida ($K \sim \frac{1}{kecepatan}$), sehingga

semakin besar bilangan Pradntl maka kecepatannya semakin menurun, ditunjukkan pada Gambar 5.5.

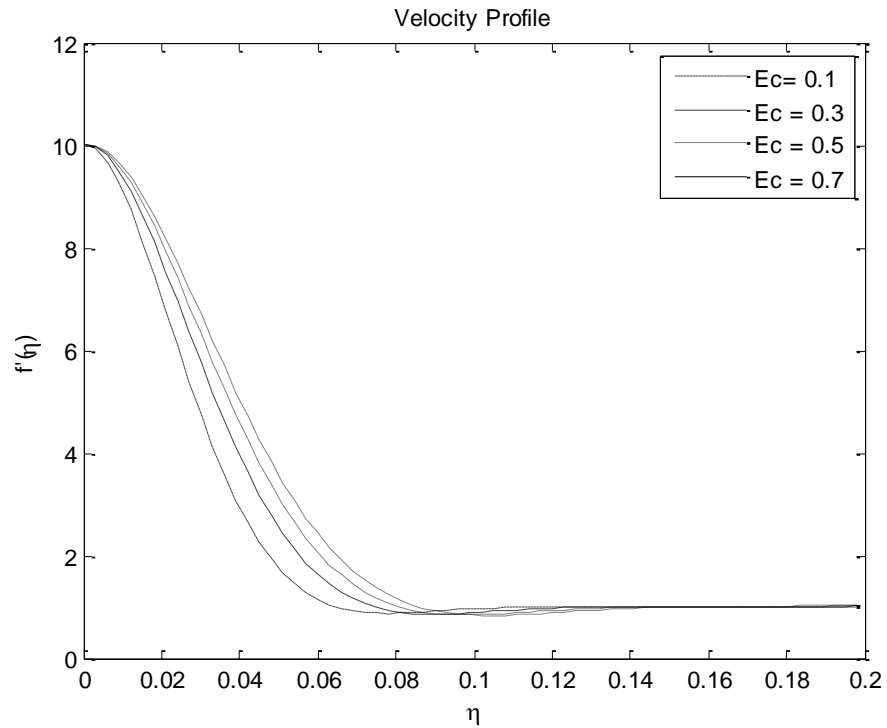
Semakin besar nilai bilangan Pradntl maka temperatur akan semakin turun, hal ini disebabkan parameter bilangan Pradntl berbanding terbalik dengan diffusivitas termal ($Pr \sim \frac{1}{\alpha}$) dimana bilangan Pradntl menunjukkan besar distribusi panas pada fluida yang melewati pelat, ditunjukkan pada Gambar 5.6.



Gambar 5.6 Pengaruh variasi bilangan Pradntl terhadap Profil Temperatur

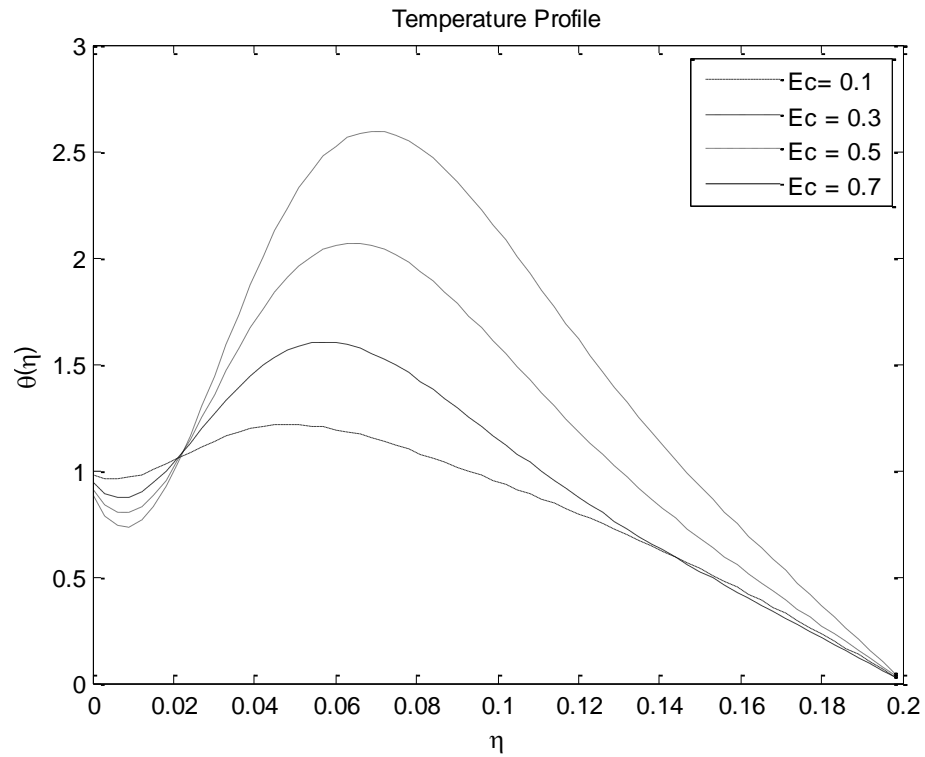
5.3.4 Pengaruh variasi bilangan Euckert Ec terhadap Profil temperatur dan Profil Kecepatan

Nilai bilangan Eckert yang digunakan adalah $Ec = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ sedangkan nilai parameter lain yang digunakan adalah $Pr = 0.7$, $K = 1$, $fw = 10$, $M = 21$, $\lambda_m = 1$.



Gambar 5.7 Pengaruh variasi bilangan Eckert terhadap Profil Kecepatan

Bilangan Eckert berbanding lurus dengan kecepatan dari aliran bebas ($E_c \sim U_\infty$) sehingga semakin besar nilai dari bilangan Eckert maka kecepatan dari fluida semakin bertambah seiring bertambahnya kecepatan pada fluida, Gambar 5.7.



Gambar 5.8 Pengaruh variasi bilangan Eckert terhadap Profil Temperatur

Bertambahnya kecepatan pada fluida menyebabkan gesekan pada fluida dengan pelat akan semakin besar sehingga temperatur pada fluida akan naik, Gambar 5.8.

BAB 6

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil simulasi yang dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa diperoleh hubungan antara parameter-parameter pada model matematika terhadap laju dan temperatur fluida sebagai berikut:

1. Kecepatan pada fluida akan mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya nilai pada parameter magnetik (M), parameter viskoelastik (K), dan bilangan Pradntl (Pr).
2. Bertambahnya nilai pada bilangan Eckert (Ec) akan menambah kecepatan pada fluida.
3. Temperatur pada fluida akan mengalami kenaikan ketika parameter magnetik (M), parameter viskoelastik (K), dan bilangan Eckert (Ec) semakin besar.
4. Temperatur pada fluida akan mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya nilai bilangan Pradntl (Pr).

6.1 Saran

Adapun saran yang diberikan kepada pembaca untuk penelitian kali ini adalah

1. Pada penelitian kali ini jenis aliran yang dipakai adalah konveksi bebas dengan kondisi tunak, akan lebih baik jika penelitian dikembangkan pada jenis aliran konveksi campuran dan dalam keadaan tidak tunak.
2. Media yang digunakan berupa grid yang tidak berstruktur.

DAFTAR PUSTAKA

- Abel, M.S dan N. Mahesha, (2008), "Heat Transfer in MHD Viscoelastic Fluid Flow Over a Streching Sheet with Variable Thermal Conductivity Non-Uniform Heat Source and Radiation", Vol. 32, hal 1995-1983.
- Ahmed, N., Sarma, D., dan Deka, H. (2012). "MHD Mixed Convection and Mass Transform from an Infinite Vertical Porous Plate with Chemical Reaction in Presence of Heat Source". Vol. 6, No. 21, hal 1011-1020.
- Anderson, H.I. (1992), "MHD Flow of Viscoelastic Fluid Past a Streching Surface", Vol. 95, No (1-4), hal. 227-230.
- Arber, T. (2013), Fundamentals of Magnetohydrodynamics (MHD), Lecture handout: University of Warwick, UK.
- Co, A. dan Bird, R.B. (1977), "Slow Viscoelastic Radila Flow Between Parallel Disks", Vol. 33, No. (5-6), hal. 385-404.
- Kasim, A.R.M. (2014), *Convective Boundary Flow of Viscoelastic Fluid*, Disertasi Ph.D., Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.
- Kreith, F. (1994), *Prinsip-Prinsip Perpindahan Panas*, Edisi Ketiga, Erlangga, Jakarta.
- Long, C. dan Sayma, N. (2009), Heat Transfer 1st Edition. Buku ini dapat diperoleh dari : <http://bookbon.com/en/heat-transfer-ebook>.
- Potter, Merlec C. dan Wiggert, David C, (2008), *Mekanika Fluida*, Erlangga, Jakarta.
- Rivlin, R.S. (1949), "Large Elastic Deformation of Isotropic Materials. Heinemann", Vol. 74, No. 8, hal. 341-347.

- Tonekaboni, S.A.M., Ramin, A., dan Reza, K. (2011). "On the Study of Viscoelastic Wlters' B Fluid in Boundary Layer Flows". Vol 2012, hal 18.
- Welty, J.R., Charles, E.W., dan Robert, E.W. (1976), *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*, Corvallis, USA.
- Widodo, B., Wen, X., dan Ingham, D.B. (1997), "The Free Surface Fluid Flow in Arbitrary Shaaped in a Channel". *Journal Of Engineering Analysis with Boundary Element*. Vol19, PP.299-308.
- Wireworld. (2011), *Seminar Wire Drawing*. Artikel ini dapat didownload di website: www.wireworld.com/seminarwiredrawing.

LAMPIRAN 1

a) Turunan tensor regangan pada fluida Walter-B

[illegible]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left[\left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \\ \bullet \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2k_0 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{u}{2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left(v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) - \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[\left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\ \bullet \quad \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2k_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) - 2 \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) \right] \\ \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2k_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) - \left(4 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \\ \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_0 \left[\left(2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) - \left(8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \\ \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_0 \left[2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} + \left(2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 4 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned}$$

LAMPIRAN 2

PENGGABUNGAN RUMUS PADA MOMENTUM

Dengan mensubstitusikan stress tensor ke dalam persamaan (4.22) maka akan didapat persamaan momentum pada sumbu x

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \rho g$$

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left(2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[-6 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \right. \\ \left. 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left[\left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] - \rho g_x$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - k_0 \left[2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \right] - \\ k_0 \left[2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right] - k_0 \left[-6 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - \\ k_0 \left[-4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - k_0 \left[-2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] - \\ k_0 \left[\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \rho g_x$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left[u \left(2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \right) + \right. \\ \left. v \left(2 \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \right] - k_0 \left[-\frac{\partial u}{\partial x} \left(6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] - k_0 \left[\left(-2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - \rho g_x$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\ \left. u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] - k_0 \left[v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + v \left(2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \right] - \\ k_0 \left[-\frac{\partial u}{\partial x} \left(4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] - k_0 \left[\left(-\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) + \right. \\ \left. \left(-2 \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right) \right] - k_0 \left[\left(-2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \rho g_x$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - k_0 \left[u \left(\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) \right] - k_0 \left[v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + v \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] -$$

$$k_0 \left[-\frac{\partial u}{\partial x} \left(4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] - k_0 \left[\left(-\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \left(-2 \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) \right) \right] - k_0 \left[\left(-2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \rho g_x$$

karena

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ maka mengakibatkan}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan juga}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

dan mengakibatkan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Sehingga didapat :

$$\begin{aligned} \rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \right] - \\ &\quad k_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(4 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] - k_0 \left[\left(-2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \\ &\quad \rho g_x \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \right] - \\ &\quad k_0 \left[-\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] - k_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \rho g_x \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \right] - \\ &\quad k_0 \left[-\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - \rho g_x \end{aligned}$$

Persamaan momentum pada sumbu y

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \rho g$$

$$\begin{aligned}
\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left[\left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\
&\quad k_0 \left[2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} + \left(2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 4 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] - \rho g_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} + \left[\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - k_0 \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right] - \\
&\quad k_0 \left[v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right] - k_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - k_0 \left[-2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - \\
&\quad k_0 \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - k_0 \left[-2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \right. \\
&\quad \left. 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \rho g_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right] - k_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - \\
&\quad k_0 \left[-\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] - k_0 \left[-\frac{\partial v}{\partial y} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] - \rho g_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \right] - k_0 \left[v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right] - \\
&\quad k_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - \\
&\quad k_0 \left[\left(-\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \left(2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) \right] - k_0 \left[\left(-\frac{\partial v}{\partial y} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right) + \left(-\frac{\partial v}{\partial y} \left(4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right) \right] - \rho g_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. u \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] - k_0 \left[v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + v \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - \\
& k_0 \left[\left(-\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) + \left(-2 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) \right] - k_0 \left[\left(-2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) + \left(-\frac{\partial v}{\partial y} \left(4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right) \right] - \rho g_y
\end{aligned}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ maka mengakibatkan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan juga}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

sehingga didapat :

$$\begin{aligned}
\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right] - \\
& k_0 \left[-\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - k_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \left(4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] - \rho g_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right] - \\
& k_0 \left[-\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - k_0 \left[\frac{\partial v}{\partial y} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \\
& \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - \rho g_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right] - \\
& k_0 \left[-\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] - \rho g_y
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan persamaan momentum kearah sumbu x dan sumbu y sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \right] - \\
& \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - \rho g_x
\end{aligned}$$

$$\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] - \rho g_y$$

Pengaruh magnet pada model

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} + \sigma (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 \quad (1)$$

dengan $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$

maka diperoleh $(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) = (vB_0i, uB_0j, 0)$

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = (-uB_0^2i, -vB_0^2j, 0) \quad (2)$$

Substitusi Persamaan (2) ke dalam Persamaan (1) maka akan diperoleh

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} + \sigma (-uB_0^2i, -vB_0^2j, 0)$$

Grafitasi pada fluida nilainya sangat kecil sehingga bisa diabaikan, maka Persamaan () menjadi

$$\mathbf{F} = \sigma (-uB_0^2i, -vB_0^2j, 0)$$

Karena gaya yang bekerja pada fluida adalah pada arah sumbu x maka gaya magnet yang dipakai adalah pada arah sumbu x yaitu $-uB_0^2i$

Penyederhanaan Persamaan Momentum menggunakan Teori Lapisan Batas

Berdasarkan Persamaan (4.39) akan dilakukan penyederhanaan untuk persamaan momentum sebagai berikut

1. Persamaan momentum pada sumbu x

$$\left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - \rho g_x$$

$$1 \frac{1}{\Delta} \frac{\Delta^2}{\Delta} = \Delta^2 \left[\frac{1}{\Delta} \frac{1}{\Delta^2} \right] \Delta^2 \left[1 \left[\frac{1}{\Delta} \frac{1}{\Delta^2} \right] \Delta \left[\frac{1}{\Delta} \frac{1}{\Delta^3} \right] \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{\Delta} \frac{\Delta^2}{1} \right] \frac{\Delta^2}{1 \Delta} \frac{1}{1} \left[\frac{\Delta^2}{\Delta} \frac{1}{\Delta^2} \right] \right] \frac{1}{\Delta^2} 1 \Delta^2$$

$$1 \frac{1}{\Delta} = \Delta^2 \left[1 \frac{1}{\Delta^2} \right] \Delta^2 \left[\left[1 \frac{1}{\Delta^2} \right] \Delta \left[\frac{1}{\Delta} \frac{1}{\Delta^3} \right] \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{\Delta} \frac{\Delta^2}{1} \right] \frac{\Delta^2}{1 \Delta} \left[\frac{\Delta^2}{\Delta} \frac{1}{\Delta^2} \right] \right] \frac{1}{\Delta^2} 1 \Delta^2$$

$$\left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - \rho g_x$$

Penurunan Persamaan energi dengan *stream function*

dengan memasukkan *stream function* ke dalam persamaan energi didapat

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{v}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\
 (U_\infty \cdot f') \left((T_W - T_\infty) \cdot \theta' \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right) \cdot \eta \right) &+ \left[\left(-\left(\frac{U_\infty v}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} (f - f' \cdot \eta) \right) \left(\theta' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2vx} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (T_W - T_\infty) \right) \right] = \\
 \alpha (T_W - T_\infty) \cdot \theta'' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2vx} \right) &+ \frac{v}{c_p} (f'')^2 \left(\frac{U_\infty}{2vx} \right) U_\infty^2 \\
 (T_W - T_\infty) \left[(U_\infty \cdot f') \cdot \theta' \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right) \cdot \eta \right. &+ \left. \left(-\left(\frac{U_\infty}{2x} \right) (f - f' \cdot \eta) \cdot \theta' \right) \right] = \frac{\alpha}{v} \cdot (T_W - T_\infty) \cdot \theta'' \left(\frac{U_\infty}{2x} \right) + \\
 \frac{1}{c_p} (f'')^2 \left(\frac{U_\infty}{2x} \right) U_\infty^2 & \\
 \left(\frac{U_\infty}{2x} \right) \left[(U_\infty \cdot f') \cdot \theta' \cdot \left(\frac{1}{2x} \right) \cdot \eta \cdot \left(\frac{2x}{U_\infty} \right) - f \theta' - f' \cdot \eta \cdot \theta' \right] &= \left(\frac{U_\infty}{2x} \right) \frac{1}{(T_W - T_\infty)} \left[\frac{\alpha}{v} \cdot (T_W - T_\infty) \cdot \theta'' + \right. \\
 \left. \frac{1}{c_p} (f'')^2 U_\infty^2 \right] & \\
 \left[(U_\infty \cdot f') \cdot \theta' \cdot \left(\frac{1}{2x} \right) \cdot \eta \cdot \left(\frac{2x}{U_\infty} \right) - f \theta' - f' \cdot \eta \cdot \theta' \right] &= \left[\frac{\alpha}{v} \cdot \theta'' + \frac{1}{(T_W - T_\infty)} \frac{1}{c_p} (f'')^2 U_\infty^2 \right] \\
 -f \theta' &= \frac{1}{Pr} \theta'' + E_c (f'')^2 \\
 \frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta' + E_c (f'')^2 &= 0
 \end{aligned}$$

penurunan kecepatan (u, v) terhadap sumbu y :

- $\frac{\partial u}{\partial y} = \left(U_\infty \cdot f'' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (U_\infty \cdot f')$

$$\begin{aligned}
 &= U_\infty \cdot f'' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2v} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) \\
 &= U_\infty \cdot f'' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right) \\
 &= \left(-\frac{U_\infty}{2x} \right) \cdot f'' \cdot \eta
 \end{aligned}$$

- $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \left(U_\infty \cdot f''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)\right)$
- $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(U_\infty \cdot f'' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(U_\infty \cdot f''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(U_\infty \cdot f''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)\right)\right)$$

$$= \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2v}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot f'''\right) + \left(\frac{U_\infty^2}{2xv} \cdot \left(\frac{U_\infty}{2v}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot f'''' \cdot \left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)\right)$$

$$= \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2v}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot f'''\right) + \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2xv}\right) \cdot \eta \cdot f'''' \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)\right)$$
- $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \left(U_\infty \cdot f'''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$
- $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \eta \cdot f''\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot f''\right)$$

$$u' = \left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v' = f''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$u'v + uv' = \left(\left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot f''\right) + \left(\left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot f''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot f'' + \left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right) \cdot y \cdot f''' \\
\bullet \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) &= \left(U_\infty \cdot f'' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \left(\left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot f'' + \left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right) \cdot y \cdot f'''\right) \\
&= \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right) \cdot (f'')^2 \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)\right) + \left(U_\infty \cdot f'' \cdot f''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot y \cdot \left(\frac{U_\infty}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)\right) \\
&= \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right) \cdot (f'')^2 \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right)\right) + \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv}\right) \cdot \eta \cdot f'' \cdot f'''\right)
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan persamaan dengan stream function ke dalam Persamaan momentum maka diperoleh

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2$$

dengan mensubstitusikan

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

maka diperoleh persamaan

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2$$

$$- \left(\frac{U_\infty^2}{2x} \right) (f \cdot f'') =$$

$$\begin{aligned}
&v \cdot \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2x} \cdot f''' \right) \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[(U_\infty \cdot f') \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2v} \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot f''' + \left(\frac{U_\infty^2}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'''' \cdot \left(-\frac{1}{2x} \right) \right) + \right. \\
&\left(- \left(\frac{U_\infty}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (f - f' \cdot \eta) \right) \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot f''' \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \left(\left(\frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot (f'')^2 \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) + \right. \\
&\left. \left(\frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'' \cdot f''' \right) + \\
&\left. \left(- \left(\frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot (f'')^2 \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) + \left(\frac{U_\infty^2}{2x} \right) \cdot \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'' \cdot f''' \right) \right] - \frac{1}{\rho} \sigma u \beta_0^2
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right)(f \cdot f'') = \left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right) \cdot f''' - \left(\frac{U_\infty^2}{2x}\right) \frac{k_0}{\rho} \left[(U_\infty \cdot f') \left(-\frac{1}{xv} \cdot f''' + \left(-\frac{1}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'''' \right) + \right. \\ \left. \left(\left(-\frac{U_\infty}{2xv} \right) (f - f' \cdot \eta) \cdot f'''' \right) + \left((f'')^2 \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) \right) \right] - M \cdot f'$$

$$-(f \cdot f'') = f''' - \frac{k_0}{\rho} \left[(U_\infty \cdot f') \left(-\frac{1}{xv} \cdot f''' + \left(-\frac{1}{2xv} \right) \cdot \eta \cdot f'''' \right) + \left(\left(-\frac{U_\infty}{2xv} \right) (f - f' \cdot \eta) \cdot f'''' \right) + \right. \\ \left. \left((f'')^2 \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) \right) \right] - M \cdot f'$$

$$-(f \cdot f'') = f''' - \frac{k_0}{\rho} \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) [-2 \cdot f' \cdot f''' - f' \cdot \eta \cdot f'''' - f \cdot f'''' + f' \cdot \eta \cdot f'''' + (f'')^2] - M \cdot f'$$

$$\text{dengan } \frac{k_0}{\rho} \left(\frac{U_\infty}{2xv} \right) = \frac{K}{2}$$

$$-(f \cdot f'') = f''' - \frac{K}{2} [-2 \cdot f' \cdot f''' - f \cdot f'''' + (f'')^2] - M \cdot f'$$

$$f \cdot f'' + f''' + \frac{K}{2} [2 \cdot f' \cdot f''' + f \cdot f'''' - (f'')^2] - M \cdot f'$$

LAMPIRAN 3

LISTING PROGRAM

```
clear all;clc;close all;
```

```
%%Viscouselastic value  
Viscoelastic(1) =0.011;  
Viscoelastic(2) =0.012;  
Viscoelastic(3) =0.013;  
Viscoelastic(4) =0.014;
```

```
%%Magnetik  
Magnetic(1) = 0.05;  
Magnetic(2) = 0.1;  
Magnetic(3) = 0.3;  
Magnetic(4) = 0.5;
```

```
%%Bilangan Prandtl  
prandtl(1) =0.05;  
prandtl(2) =0.1;  
prandtl(3) =0.3;  
prandtl(4) =0.5;
```

```
%%Koefisien Euckert  
Euckert(1) = 0.1;  
Euckert(2) = 0.3;  
Euckert(3) = 0.5;  
Euckert(4) = 0.7;
```

```
%=====
```

```
%%length  
delta_y=0.003;  
y=0:delta_y:0.2;  
N=length(y);
```

```
%=====
```

```
%%Initial condition  
for i = 1:N  
    f(i) =1;  
    teta(i) =1;
```

```
end;
```

```
%=====
```

```

disp('1. Magnetic (tetap), Prandtl(tetap), Viskositas(bervariasi),
Euckert(tetap),f_w(tetap),lamda_m(tetap)');
disp('2. Magnetic (bervariasi), Prandtl (tetap), Viskositas(tetap),
Euckert(tetap),f_w(tetap),lamda_m(tetap)');
disp('3. Magnetic (tetap), Prandtl (bervariasi), Viskositas(tetap),
Euckert(tetap),f_w(tetap),lamda_m(tetap)');
disp('4. Magnetic (tetap), Prandtl (tetap), Viskositas(tetap),
Euckert(bervariasi),f_w(tetap),lamda_m(tetap)');
pilih = input('pilih (1,2,3,atau 4) = ');
for it = 1:4
    if(pilih==1)
        Pr=-6;
        K=Viscoelastic(it);
        Mg=2;
        Ec=2;
        fw=0;
        lamda=0.5;
    elseif(pilih==2)
        Pr=-3;
        K=0.011;
        Mg=Magnetic(it);
        Ec=1;
        fw=0;
        lamda=0.5;
    elseif(pilih==3)
        Pr=prandtl(it);
        K=0.014;
        Mg=2;
        Ec=0.3;
        fw=0;
        lamda=0.5;
    elseif(pilih==4)
        Pr=0.7;
        K=1;
        Mg=21;
        Ec=Euckert(it);
        fw=10;
        lamda=1;
    else
        return;
    end;

    r1=1/(2*delta_y);
    r2=1/((delta_y)^2);
    r3=1/((2*delta_y)^3);
    r4=1/((delta_y)^4);
    %koef momentum
    A=(-1)*2*r3)-(Mg*r1);
    C=(K*r4)-(2*r2);
    E=(-1)*4*r1*r3)-(r4);
    F=(8*r1*r3)-(2*r4);
    G=(2*r1*r3);
    %koef energy
    I=(r2/Pr)+(r1*f(i));
    J=(r2/Pr)-(r1*f(i));
    L=((2*r2)/Pr);
    Q=(Ec*r2);

```

```

for it_max = 1:300

for i=1:N
%=====
%=====

%Momentum
if i==1 %subs: f(i-2)=f(-1)=(f(1)-((2*delta_y)*lamda)) ;f(0)=fw
f(i)=sqrt((((-1)*A*((f(i+1))-fw))-(r3*(f(i+2)-(f(1)-
((2*delta_y)*lamda))))-(r2*((f(i)*f(i+1))+(f(i)*fw)))- (K/2*(
(r4*f(i)*(f(i+2)+(f(1)-((2*delta_y)*lamda)))))...
+(G*((f(i+2)*f(i+1))- ((f(1)-((2*delta_y)*lamda))*f(i+1)))-
(f(i+2)*fw)+ ((f(1)-((2*delta_y)*lamda))*fw)))+(E*((f(i+1)^2)+((fw)^2)))
+(F*f(i+1)*fw) )))/C);

elseif (i==2) %subs:f(0)=f(i-2)= (f(2)-((2*delta_y)*fw))
f(i)=sqrt((((-1)*A*(f(i+1)-f(i-1)))-(r3*(f(i+2)-(f(2)-
((2*delta_y)*fw))))-(r2*((f(i)*f(i+1))+(f(i)*f(i-1))))- (K/2*(
(r4*f(i)*(f(i+2)+(f(2)-((2*delta_y)*fw)))))...
+(G*((f(i+2)*f(i+1))- ((f(2)-((2*delta_y)*fw))*f(i+1)))-
(f(i+2)*f(i-1))+ ((f(2)-((2*delta_y)*fw))*f(i-1))))+(E*((f(i+1)^2)+(f(i-
1)^2))) +(F*f(i+1)*f(i-1) )))/C);

elseif (i==N-1) %subs :f(i+2)=f(N+1)= (f(N-1)+(2*delta_y))
f(i)=sqrt((((-1)*A*(f(i+1)-f(i-1)))-(r3*((f(N-1)+(2*delta_y))-f(i-
2))))-(r2*((f(i)*f(i+1))+(f(i)*f(i-1))))- (K/2*( (r4*f(i)*((f(N-
1)+(2*delta_y))+f(i-2)))))...
+(G*((f(N-1)+(2*delta_y))*f(i+1))- (f(i-2)*f(i+1))- ((f(N-
1)+(2*delta_y))*f(i-1))+ (f(i-2)*f(i-1))))+(E*((f(i+1)^2)+(f(i-1)^2)))
+(F*f(i+1)*f(i-1) )))/C);

elseif (i==N) %subs : f(i+1)=f(N+1)= ((2*delta_y)+f(N-1)) ;
f(i+2)=f(N+2)= (f(N)+(2*delta_y))
f(i)=sqrt((((-1)*A*((2*delta_y)+f(N-1))-(f(i-1))))-
(r3*((f(N)+(2*delta_y))-f(i-2)))-(r2*((f(i)*((2*delta_y)+f(N-1)))+(f(i)*f(i-
1))))- (K/2*( (r4*f(i)*((f(N)+(2*delta_y))+f(i-2)))))...
+(G*((f(N)+(2*delta_y))*((2*delta_y)+f(N-1)))- (f(i-
2)*((2*delta_y)+f(N-1)))- ((f(N)+(2*delta_y))*f(i-1))+ (f(i-2)*f(i-1))))
+(E*((((2*delta_y)+f(N-1))^2)+(f(i-1)^2))) +(F*((2*delta_y)+f(N-1))*f(i-1)
)))/C);

else
f(i)=sqrt((((-1)*A*(f(i+1)-f(i-1)))-(r3*(f(i+2)-f(i-2)))-
(r2*((f(i)*f(i+1))+(f(i)*f(i-1))))- (K/2*( (r4*f(i)*(f(i+2)+f(i-2)))))...
+(G*((f(i+2)*f(i+1))- (f(i-2)*f(i+1))- (f(i+2)*f(i-1))+ (f(i-
2)*f(i-1)))))+(E*((f(i+1)^2)+(f(i-1)^2))) +(F*f(i+1)*f(i-1) )))/C);

end

```

```

%=====
% Energy      (alternatif 2 ketika batas pada f tidak sama antara momentum
dan energy)

    if i==1 %substitusi syarat batas : teta(i-1)= (teta(i+1)-(2*delta_y))
        teta(i)=(((I*teta(i+1))+(J*1)+(Q*(f(i+1)-(2*f(i))+fw)))/L);

    elseif(i==N) %substitusi syarat batas : teta(~)=0, teta(0)=1;
        teta(i)=(((I*0)+(J*teta(i-1))+(Q*((2*delta_y)+f(N-1)) -
(2*f(i))+f(i-1))))/L);

    else
        teta(i)=(( (I*teta(i+1))+(J*teta(i-1))+(Q*(f(i+1)-(2*f(i))+f(i-
1)))) )/L);

    end;

end
end
%=====

display 'f(1)'
f(1)
display 'teta(1)'
teta(1)

if(pilih==1)
    if(it==1)
        figure(1);
        plot(y,f,'black-.','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profil ');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black-.','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile ');
        hold on;

    elseif(it==2)
        figure(1);
        plot(y,f,'black--','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profil');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black--','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
    elseif(it==3)
        figure(1);
        plot(y,f,'black:','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profil');
        hold on;
        figure(2);

```



```

        plot(y,teta,'black:', 'Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
    else
        figure(1);
        plot(y,f,'black-', 'Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profile');
        hold on;
        legend('K = 0.011', 'K = 0.012', 'K = 0.013', 'K = 0.014');
        xlabel('\eta');
        ylabel('f' '(\eta)');
        figure(2);
        plot(y,teta,'black-', 'Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
        legend('K = 0.011', 'K = 0.012', 'K = 0.013', 'K = 0.014');
        xlabel('\eta');
        ylabel('\theta(\eta)');
    end;

elseif(pilih==2)
    if(it==1)
        figure(1);
        plot(y,f,'black-.', 'Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profil');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black-.', 'Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
    elseif(it==2)
        figure(1);
        plot(y,f,'black--', 'Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profil');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black--', 'Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
    elseif(it==3)
        figure(1);
        plot(y,f,'black:', 'Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profil');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black:', 'Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
    else
        figure(1);
        plot(y,f,'black-', 'Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profile ');
        hold on;
        legend('Magnetic = 0.05', 'Magnetic = 0.1', 'Magnetic = 0.3', 'Magnetic
= 0.5');
        xlabel('\eta');
        ylabel('f' '(\eta)');

```

```

        figure(2);
        plot(y,teta,'black-','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
        legend('Magnetic = 0.05','Magnetic = 0.1','Magnetic = 0.3','Magnetic
= 0.5');
        end;
        xlabel('\eta');
        ylabel('\theta(\eta)');

elseif(pilih==3)
    if(it==1)
        figure(1);
        plot(y,f,'black-.','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profile');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black-.','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
    elseif(it==2)
        figure(1);
        plot(y,f,'black--','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profile');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black--','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
    elseif(it==3)
        figure(1);
        plot(y,f,'black:','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profile');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black:','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
    else
        figure(1);
        plot(y,f,'black-','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profile');
        hold on;
        legend('Pr = 0.05','Pr = 0.1','Pr = 0.3','Pr = 0.5');
        xlabel('\eta');
        ylabel('f''(\eta)');
        figure(2);
        plot(y,teta,'black-','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
        legend('Pr = 0.05','Pr = 0.1','Pr = 0.3','Pr = 0.5','Pr = 0.7','Pr =
0.9');
        xlabel('\eta');
        ylabel('\theta(\eta)');
        end;

```

```

else
    if(it==1)
        figure(1);
        plot(y,f,'black-.','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profile');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black-.','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
    elseif(it==2)
        figure(1);
        plot(y,f,'black--','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profile');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black--','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;

    elseif(it==3)
        figure(1);
        plot(y,f,'black:','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profile');
        hold on;
        figure(2);
        plot(y,teta,'black:','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;

    else
        figure(1);
        plot(y,f,'black-','Linewidth',1.46);
        title('Velocity Profile');
        hold on;
        legend('Ec= 0.1','Ec = 0.3','Ec = 0.5','Ec = 0.7');
        xlabel('\eta');
        ylabel('f'('\eta)');
        figure(2);
        plot(y,teta,'black-','Linewidth',1.46);
        title('Temperature Profile');
        hold on;
        legend('Ec= 0.1','Ec = 0.3','Ec = 0.5','Ec = 0.7');
        xlabel('\eta');
        ylabel('\theta(\eta)');
        end;
    end;

end;

end;

```




BIOGRAFI PENULIS

Penulis bernama Putri Pradika Wanti, lahir di Tulungagung, 24 April 1988, merupakan anak pertama dari 2 bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di SDN Kampungdalem 02 (1995-2001), SMPN 01 Tulungagung (2001-2004), SMAN 1 Boyolangu (2004-2007). Setelah lulus dari jenjang Sekolah Menengah Atas, penulis melanjutkan studi di Institute Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada jurusan matematika (2007-2011) melalui jalur SPMB. Pada masa perkuliahan Penulis aktif menjadi Asisten Dosen. Kemudian penulis melanjutkan studi magister di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan NRP 1213201022. Penulis dapat dihubungi melalui e-mail: putri.pradika.w@gmail.com.